

النظرية الخاصة للأغلفة الخطية
بحث في الحلول بين الخطوط المائلة المتوازية ذات
الميل ± 1

حسين عبد العزيز عبده الحسانين

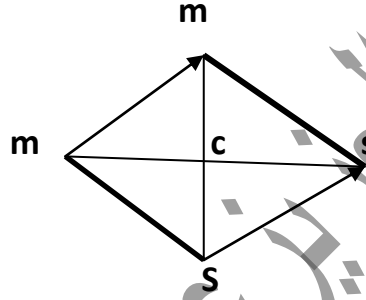
2025 ميلادية - 1447 هجرية

النظرية الخاصة للأغلفة الخطية

تعريف ومفاهيم

• الأغلفة المزدوجة المرتبة :

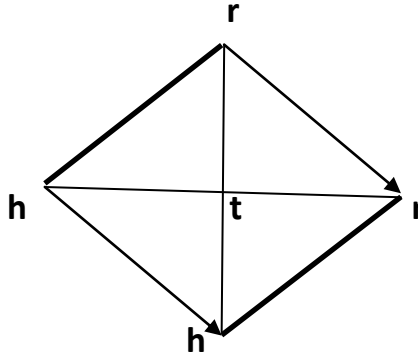
قلنا أن الأغلفة ما هي إلا علاقة ترتيبية على خط الأعداد ، وهنا سوف نولى إهتماما خاصا بترتيب الأعداد المكونة للغلاف ، فإذا كان لدينا الأعداد الصحيحة التالية $m, c, s \in \mathbb{Z}$ بحيث $m > c > s$ وكذلك $c = m + s/2$ وتم الحصول على الغلاف المزدوج التالي $|| E || (m, s)$:



من الشكل السابق نرى منه :

- أن ترتيب الأعداد من اليسار لليمين على الغلاف الأفقى وذلك بدءا من العدد m عند حافته اليسرى وحتى العدد s عند حافته اليمنى وكذلك ترتيب الأعداد على الغلاف الرأسى بدءا من العدد m عند حافته العليا وحتى العدد s عند حافته السفلى .
- الغلاف المزدوج السابق نرى فيه إتجاه السهم ss من أسفل ولأعلى ولجهة اليمين أخذا إتجاها متزايدا وكذلك إتجاه السهم mm يتجه هو الآخر من أسفل لأعلى ولجهة اليمين أخذا إتجاها متزايدا .
- ولما كان الغلاف المزدوج يأخذ شكل المربع المائل فكل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين ، وقطراه متعامدان عند c وينصف كلا منها الآخر .
- الغلاف المزدوج الذى به هذه الخصائص السابقة يسمى بالغلاف المزدوج المتزايد أو الصاعد ونرمز له بالرمز $|| E || (m, s, +)$.

أما إذا كان لدينا الأعداد الصحيحة التالية $h, t, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $h < t < r$ وكذلك $t = h + r/2$ وتم الحصول على الغلاف المزدوج التالي $II E II (h, r)$:

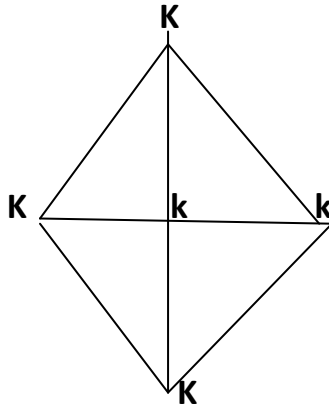


من الشكل السابق نرى منه :

- أن ترتيب الأعداد من اليسار لليمين على الغلاف الأفقى وذلك بدءاً من العدد h عند حافته اليسرى وحتى العدد r عند حافته اليمنى وكذلك ترتيب الأعداد على الغلاف الرأسى بدءاً من العدد r عند حافته العليا وحتى العدد h عند حافته السفلى .
- الغلاف المزدوج السابق نرى فيه إتجاه السهم rr من أعلى ولأسفل ولجهة اليمين آخذاً إتجاهاً متناقصاً وكذلك إتجاه السهم hh يتجه هو الآخر من أعلى ولأسفل ولجهة اليمين آخذاً إتجاهاً متناقصاً .
- ولما كان الغلاف المزدوج يأخذ شكل المربع المائل فكل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين ، وقطراه متعامدان عند t وينصف كلا منهما الآخر .
- الغلاف المزدوج الذى به هذه الخصائص السابقة يسمى بالغلاف المزدوج المتناقص أو الهابط ونرمز له بالرمز $II E II (h, r, -)$.

• الأعداد الغلافية والغلاف المزدوج

- عرفنا فيما سبق بأن العدد الغلافى ما هو إلا غلافاً بعده صفر أى : $|k| = 0$ كذلك يكون العدد الغلافى للغلاف المزدوج هو الآخر بعده صفر أى : $||k|| = 0$ ، فإذا كان لدينا الغلاف المزدوج $II E II (a, b)$ حيث $a = c = b = k$ فإننا نحصل على العدد الغلافى المزدوج التالى : $II E II (k, k)$ ويأخذ الشكل التالى :



ومن الشكل نرى أن العدد يتواجد على كل الحواف ويحقق كل التعاريف الخاصة بشروط الغلاف وبعده الذي يساوى الصفر حيث نجد أن :

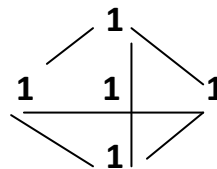
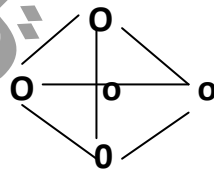
$$C = k + k / 2 = 2k/2 = k$$

$$||E|| (k, k) = k - k = 0$$

$$n||E|| (k, k) = (||E|| / 2) + 1 = (0/2) + 1 = 1$$

أى أن العدد الغلافى مركز غلافه هو العدد نفسه وبعده مساويا للصفر وعدد الأغلفة مساويا للواحد الصحيح .

- إذا كانت $k = 0$ فإن العدد الغلافى الناتج يسمى بالصفر الغلافى وله نفس الخصائص السابقة للعدد الغلافى k وكما هو بالشكل التالى .
- إذا كانت $k = 1$ فإن العدد الغلافى الناتج يسمى بالواحد الغلافى وله نفس الخصائص السابقة للعدد الغلافى k وكما هو واضح بالشكل التالى .



• الأعداد الغلافية والأغلفة المزدوجة المرتبة :

- نتج من تعريفنا للأغلفة المزدوجة المرتبة نوعان من الأغلفة وهما :
- الغلاف المزدوج المتزايد أو المتصاعد
- الغلاف المزدوج المتناقص أو الهابط

والسؤال هنا : ما هو إتجاه العدد الغلافى ؟ وكيف نعرف له إتجاهها إن تم ذكره ؟
 إن العدد الغلافى ما هو إلا خط مائل مفرد قد يكون ذو إتجاه موجباً ميله $+1$ وقد يكون ذو إتجاه سالباً وميله -1 ولكن نظراً لأن العدد الغلافى تتساوى فيه حوافه مع مركزه فمن الصعب تمييز الحركة والتغير والإتجاه فيه ولذا سوف نقوم بوضع هذه القواعد له للتعامل مع العدد الغلافى :

- لابد وأن يذكر صراحة فى العدد الغلافى إن تم كتابته لابد وأن يذكر متناقصاً هابطاً أم متزايداً صاعداً ؟ أى يكون كالتالى :

$$||E|| = (k, k, +)$$

إذا كان لدينا :

أى عدد غلافى k متزايد .

$$||E|| = (k, k, -)$$

وإذا كان لدينا :

عدد غلافى k متناقص .

- هذا من ناحية ومن ناحية أخرى إذا تم التعامل مع عددا غلافيا وغلafa مزدوجا صاعدا أو هابطا دونما ذكر لإتجاه العدد الغلافى يتم التعامل بأى طريقة نختارها وبحسب ما يمليه الموضوع قيد البحث صاعدا مع الصاعد أو هابطا مع الهابط أو بعكس ذلك .

- الأعداد الغلافية المرافقة للغلaf المزدوج المرتب :

كما رأينا لكل غلاف نقطة تقع عند منتصفه أطلقنا عليها مركز الغلاف ، وهذا المركز ما هو إلا عددا غلافيا يمثل خطا ويكتسب إتجاهه من الغلاف المرفق به ، وبالتالي إذا قلنا من الآن فصاعدا أن k بصفة عامة عددا غلافيا مرافقا لغلaf تصاعدى فهذا يعنى أن k عدد غلافى يمثل مركزا للغلaf المرفق به وتصاعدى مكتسابا إتجاهه منه .
 فمثلا إذا كانت c مركزا لغلaf مزدوج تصاعدى كان العدد الغلافى المرفق هو :

$$||E|| = (c, c, +)$$

وإذا كانت t مركزا لغلaf مزدوج هابطا كان العدد الغلافى المرفق هو :

$$||E|| = (t, t, +)$$

• الحركة الغلافية وإتجاهها

علمنا بأن الأغلفة المزدوجة منها المتزايد الصاعد والمتناقص الهابط ، وهذا التزايد والتناقص وما ينجم عنهما من صعود وهبوط يجعلنا نقدم مفهوم الحركة الغلافية وإتجاهها والفرق بينها وبين التغير الغلافى .

- الحركة الغلافية : هى إنتقال الغلاف بأكمله من نقطة إلى نقطة أخرى فى مساره المحدد له .

- التغير الغلافى : وهو التغير بالزيادة والنقصان على المحور الأفقى أو القطر الرئيسى للغلاف .

ويمكن من خلال تعريف الحركة الغلافية نجد نوعان من الحركة وهما :

- الحركة الغلافية الصاعدة : وهى التى تنجم من إنتقال الغلاف بأكمله لأعلى داخل المسار المحدد له .

- التغير الغلافى الصاعد : وهو الذى ينجم من تغير بالنقصان على المحور الأفقى أو القطر الرئيسى للغلاف .

- الحركة الغلافية الهابطة : وهى التى تنجم من إنتقال الغلاف بأكمله لأسفل داخل المسار المحدد له .

- التغير الغلافى الهابط : وهو الذى ينجم من تغير بالزيادة على المحور الأفقى أو القطر الرئيسى للغلاف .

- إتجاه الحركة ومعها التغير كما هو واضح من التعريف إنما يكون مرافقا لها وهو أكثر وضوحا فى أثناء مناقشتنا للتعريف بالأغلفة .

- إتجاه الحركة ومعها إتجاه التغير يظل ثابتا ما لم تغيره عملية الضرب أو القسمة بإشارة مخالفة .

قد يكون أحد الأقطار بالأغلفة به تغيرا مغايرا للتغير على القطر الآخر ، ولذا فإننا نقوم بتقديم مفهومان يرتبطان بالتغير الغلافى وهما :

- الأغلفة ثنائية التغير : وهى تلك الأغلفة التى بها تغير على أحد أقطارها مغايرا للتغير الغلافى على القطر الآخر كالأغلفة المتناقصة الهابطة .

- الأغلفة أحادية التغير : وهى تلك الأغلفة التى تشترك أقطارها فى تغيرا غلافيا واحدا كالأغلفة المتزايدة الصاعدة .

ومن الواضح أن التغير الغلافى زيادة أو نقصانا إنما تتعين من خلال القطر الرئيسى أو المحور الأفقى للغلاف ، ومن تعريف الغلاف المزدوج نرى أن التغير على المحور الرأسى أو القطر الفرعى لا يأخذ إلا شكلا واحدا وهو التغير الغلافى المتناقص ما لم يغيره الضرب فى إشارة مخالفة للأعداد التى تتواجد على المحور الرأسى أو القطر الفرعى .

إذا كان للعدد الغلافى إتجاها يأخذه من إتجاه الحركات الغلافية المولدة له فأين تكون حركته إذن ؟ إن حركة العدد الغلافى تكون على الخط نفسه ولكى نميز بين حركة العدد الغلافى وحركة الأغلفة نقدم هذين المفهومين للحركة الغلافية :

- التغير الغلافى الفوقى : وهو التغير من نقطة إلى أخرى على الخط الذى يمثله هذا العدد الغلافى .
 - الحركة الغلافية البينية : وهى الإنتقال بين الخطوط وبعضها البعض التى تمثلها هذه الأغلفة .
- فالتغير الفوقى هو إنتقال من نقطة لأخرى على الخط نفسه أما الحركة البينية فهى إنتقال بين خط وخط آخر .