درس تمهيدي

الضرب بمجرد النظر

النوع الأول:

(أس + ب ص) (حـ س + ء ص) = (أ حـ) س^{٢} + (أ ء + ب حـ) س ص + (ب ء) ص^{٢}

= (الأول × الأول) + (حاصل ضرب الطرفين + حاصل ضرب الوسطين) + (الثاني × الثاني)

فمثلاً :

- (٢س + ٥) (٣س - ٧) = ٦ س^{٢} + س - ٣٥
- (٢س - ٣ص) (س - ص) = ٢س^{٢} - ٥س ص + ٣ص^{٢}

تدريب

(٣س + ١) (٢ س + ٥) = ...	(٢ م + ٥ ب) (م - ٧ ب) = ...

النوع الثاني : حاصل ضرب مجموع كميتين في الفرق بينهما

(س + ص) (س - ص) = س^{٢} - ص^{٢} = (الأول)^{٢} - (الثاني)^{٢}

فمثلاً :

- (٥س + ١) (٥س - ١) = ٢٥س^{٢} - ١
- (٤ م ن - ٧ ل) (٤ م ن + ٧ ل) = ١٦ م^{٢} ن^{٢} - ٤٩ ل^{٢}

تدريب

(٢س + ٧) (٢ س - ٧) = ...	(حـ^{٢} - ٣ ء) (حـ^{٢} + ٣ ء) = ...

النوع الثالث : مربع مقدار ذي حدين

(م ± ب)^{٢} = م^{٢} ± ٢ م ب + ب^{٢} = (الأول)^{٢} ± (الأول × الثاني × ٢) + (الثاني)^{٢}

فمثلاً :

- (س - ص)^{٢} = س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢}
- (٥س + ٤)^{٢} = ٢٥س^{٢} + ٤٠ س + ١٦

تدريب

(٥ ص - ٣)^{٢} = ...	(٢ م + ٩ ن)^{٢} = ...

مثال

إذا كان : س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ، س ص = ١٢ أوجد قيمة : س + ص

الحل

∵ (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

∴ (س + ص)^{٢} = (س^{٢} + ص^{٢}) + ٢ س ص

∴ (س + ص)^{٢} = ٢٥ + ٢ × ١٢

∴ (س + ص)^{٢} = ٤٩

∴ س + ص = ± ٧

التحليل باخراج العامل المشترك الأعلى

"خاصية التوزيع"

أ س + أ ص = أ (س + ص)

مثال

حلل كلا مما ياتي باخراج العامل المشترك الأعلى:

① ٣ س − ٢١

② س^{٢} − ٥ س

③ ٦ س^{٢} ص^{٣} − ٣ س^{٤} ص^{٢}

④ أ (س − ص) + ب (س − ص)

⑤ ٣ حـ^{٢} ء (حـ + ء) − ٩ حـ ء^{٢} (حـ + ء)

⑥ أ (أ − ب) − ب (ب − أ)

الحل

① ٣ س − ٢١

= ٣ (س − ٧)

③ ٦ س^{٢} ص^{٣} − ٣ س^{٤} ص^{٢}

= ٣ س^{٢} ص^{٢} (٢ ص − س^{٢})

⑤ ٣ حـ^{٢} ء (حـ + ء) − ٩ حـ ء^{٢} (حـ + ء)

= ٣ حـ ء (حـ + ء) (حـ − ٣ ء)

② س^{٢} − ٥ س

= س (س − ٥)

④ أ (س − ص) + ب (س − ص)

= (س − ص) (أ + ب)

⑥ أ (أ − ب) − ب (ب − أ)

= أ (أ − ب) + ب (أ − ب)

= (أ − ب) (أ + ب)

مثال

إذا كان: م (٤ س + ٦ ص) + ٢ ن (٢ س + ٣ ص) = ٤٨ ، ٢ س + ٣ ص = ٦

أوجد قيمة: م + ن

الحل

∵ م (٤ س + ٦ ص) + ٢ ن (س + ٣ ص) = ٤٨

∴ ٢ م (٢ س + ٣ ص) + ٢ ن (٢ س + ٣ ص) = ٤٨

∴ ٢ (٢ س + ٣ ص) (م + ن) = ٤٨

∴ ٢ × ٦ (م + ن) = ٤٨

∴ ١٢ (م + ن) = ٤٨

∴ م + ن = $\frac{٤٨}{١٢}$

∴ م + ن = ٤

تمارين على الدرس التمهيدي

❶ أوجد حواصل الضرب الآتية بمجرد النظر:

① (٢س+٥)(٣س+٢)	② (٥س−٣)(٢س−١)	③ (٣س+١)(٢س−٣)
④ (س+ص)(٢س+ص)	⑤ (س+٤)(٣س−٢)	⑥ (٢أ^{٢}−ب)(٣أ^{٢}−ب)
⑦ (٧م+ن)(٢م−٢ن)	⑧ (حـ^{٣}−١)(٣حـ^{٣}−٤)	⑨ (٧ك^{٣}+م^{٢})(٣ك^{٣}+م^{٢})

❷ أوجد حواصل الضرب الآتية بمجرد النظر:

① (٢س+١)(٢س−١)	② (٥س^{٢}−٤)(٥س^{٢}+٤)	③ (٧م+٤)(٧م−٤)
④ (٣ل+١)(٣ل−١)	⑤ (١٠س−١)(١٠س+١)	⑥ (٢ص+ع)(٢ص−ع)
⑦ (٦س^{٣}−٥)(٦س^{٣}+٥)	⑧ (٣س^{٢}+١)(٣س^{٢}−١)	⑨ (٨أ+ب)(٨أ−ب)

❸ أوجد حواصل الضرب الآتية بمجرد النظر:

① (٢س−٣)^{٢}	② (٣س+٥ص)^{٢}	③ (٤س+١)^{٢}
④ (س−٧)^{٢}	⑤ (٣أ+ب)^{٢}	⑥ (٢م−ن)^{٢}
⑦ (ص−٦ع)^{٢}	⑧ (س^{٢}−٢ص^{٢})^{٢}	⑨ (−س−٤ص)^{٢}

❹ **إذا كان** : س^{٢}+ص^{٢} = ١٧ ، س ص = ٤ **أوجد قيمة**: س+ص

❺ **إذا كان** : س^{٢}+ص^{٢} = ١٣ ، (س+ص)^{٢} = ٢٥ **أوجد قيمة** : س ص

❻ **إذا كان** : (س+ص)^{٢} = ٦٤ ، س ص = ١٥ **أوجد قيمة** : س^{٢}+ص^{٢}

❼ **إذا كان** : س^{٢}+ص^{٢} = ٢٥ ، س ص = ١٢ **أوجد قيمة**: س − ص

[redacted]

الدرس الأول

تحليل المقدار الثلاثي البسيط

المقدار الثلاثي البسيط يكون على الصورة :

$$س^{٢} + ب س + ح$$

مثـــــال

حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

(١) $س^{٢} + ٥س + ٦$

(٢) $أ^{٢} + ١١أ ب + ٢٤ ب^{٢}$

(٣) $س^{٢} - ٦س ص + ٨ ص^{٢}$

(٤) $س^{٢} ص^{٢} + س ص ع - ٦ ع^{٢}$

(٥) $س^{٢} - ٤س - ٢١$

(٦) $س^{٦} - ٢س^{٣} - ٣٥$

(٧) $س^{٤} - ٩س^{٢} + ١٨$

(٨) $س^{٦} - ٤س^{٣} - ١٢$

الحـــــل

(١) $س^{٢} + ٥س + ٦$

$= (س + ٢)(س + ٣)$

(٢) $أ^{٢} + ١١أ ب + ٢٤ ب^{٢}$

$= (أ + ٣ب)(أ + ٨ب)$

(٣) $س^{٢} - ٦س ص + ٨ ص^{٢}$

$= (س - ٢ص)(س - ٤ص)$

(٤) $س^{٢} ص^{٢} + س ص ع - ٦ ع^{٢}$

$= (س - ٢ص ع)(س - ٤ ص ع)$

(٥) $س^{٢} - ٤س - ٢١$

$= (س + ٣)(س - ٧)$

(٦) $س^{٦} - ٢س^{٣} - ٣٥$

$= (س^{٣} + ٥)(س^{٣} - ٧)$

(٧) $س^{٤} - ٩س^{٢} + ١٨$

$= (س^{٢} - ٣)(س^{٢} - ٦)$

(٨) $س^{٦} - ٤س^{٣} - ١٢$

$= (س^{٣} + ٢)(س^{٣} - ٦)$

تـــدريـــب

(١) $أ^{٢} - ٧أ + ١٠$

= ....

(٢) $س^{٢} - ٣س - ١٨$

= ....

(٣) $س^{٤} + ١١س^{٢} ص^{٢} + ٣٠ ص^{٤}$

= ....

(٤) $ح^{٢} + ٢ح ء - ٣٥ ء^{٢}$

= ....

ملاحظات

عند تحليل المقدار الثلاثي يجب إتباع الخطوات الآتية :

(١) فك الأقواس و الاختصار.

(٢) ترتيب حدود المقدار تنازلياً حسب أس أحد الرموز المعطاة.

(٣) التحليل بإخراج (ع.م.أ)

مثـــــال

حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

(١) $٣س^{٢} - ٢١س + ٣٠$

(٢) $٥س^{٣} - ١٠س^{٢} - ١٥س$

(٣) $س^{٢} + ٣٦ - ١٣س$

(٤) $٢أ^{٣}ب^{٣} - ١٠أ^{٢}ب^{٢} + ١٢أب$

(٥) $٣٠س - ٢س^{٣} - ٤س^{٢}$

(٦) $٢ل^{٣}م - ٣٠ل م^{٣} - ٤ل^{٢}م^{٢}$

(٧) $س^{٢} - ٤س - ٣(س - ٢)$

(٨) $(س + ١)^{٢} - ٧(س + ١) + ١٢$

الحـــــل

(١) $٣س^{٢} - ٢١س + ٣٠$

$= ٣(س^{٢} - ٧س + ١٠)$

$= ٣(س - ٢)(س - ٥)$

(٢) $٥س^{٣} - ١٠س^{٢} - ١٥س$

$= ٥س(س^{٢} - ٢س - ٣)$

$= ٥س(س + ١)(س - ٣)$

(٣) $س^{٢} + ٣٦ - ١٣س$

$= س^{٢} - ١٣س + ٣٦$

$= (س - ٤)(س - ٩)$

(٤) $٢أ^{٣}ب^{٣} - ١٠أ^{٢}ب^{٢} + ١٢أب$

$= ٢أب(أ^{٢}ب^{٢} - ٥أب + ٦)$

$= ٢أب(أب - ٢)(أب - ٣)$

(٥) $٣٠س - ٢س^{٣} - ٤س^{٢}$

$= -٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣٠س$

$= -٢س(س^{٢} + ٢س - ١٥)$

$= -٢س(س - ٣)(س + ٥)$

(٦) $٢ل^{٣}م - ٣٠ل م^{٣} - ٤ل^{٢}م^{٢}$

$= ٢ل^{٣}م - ٤ل^{٢}م^{٢} - ٣٠ل م^{٣}$

$= ٢ل م(ل^{٢} - ٢ل م - ١٥م^{٢})$

$= ٢ل م(ل + ٣م)(ل - ٥م)$

(٧) $س^{٢} - ٤س - ٣(س - ٢)$

$= س^{٢} - ٤س - ٣س + ٦$

$= س^{٢} - ٧س + ٦$

$= (س - ١)(س - ٦)$

(٨) $(س + ١)^{٢} - ٧(س + ١) + ١٢$

$= [(س + ١) - ٣][(س + ١) - ٤]$

$= (س - ٢)(س - ٣)$

تمارين على الدرس الأول

❶ حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

١) س^{٢} − ٥ س + ٦
٢) س^{٢} − ٧ س + ١٢
٣) س^{٢} − ٩ س ص + ٢٠ ص^{٢}
٤) س^{٢} − ٨ س ص + ١٥ ص^{٢}
٥) أ^{٢} − ٧ أ ب + ١٠ ب^{٢}
٦) أ^{٢} ب^{٢} − ٢ أ ب − ١٥
٧) حـ^{٢} − حـ − ١٢
٨) س^{٢} ص^{٢} − ٣ س ص ع − ١٠ ع^{٢}
٩) س^{٤} − ٥ س^{٢} ص^{٢} − ١٤ ص^{٤}
١٠) م^{٢} ن^{٤} − ٦ م ن^{٢} − ١٦
١١) ك^{٢} − ك − ٢٠
١٢) س^{٨} − ١١ س^{٤} + ٣٠
١٣) س^{٢} ص^{٢} − ١٠ س ص ع + ٢٤ ع^{٢}
١٤) س^{٢} − ٢٥ س ص + ٢٤ ص^{٢}
١٥) س^{٤} − ٨ س^{٢} + ١٢
١٦) حـ^{٦} − ٢٣ حـ^{٣} ء^{٢} − ٢٤ ء^{٤}
١٧) ل^{٢} − ٣ ل م − ٤٠ م^{٢}
١٨) أ^{٢} ب^{٢} − أ ب حـ − ٥٦ حـ^{٢}
١٩) ل^{٢} م^{٤} − ٢ ل م^{٢} − ٢٤
٢٠) ء^{٢} هـ^{٦} − ١١ ء هـ^{٣} + ٢٤

❷ حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

١) ٣ س^{٢} − ٣ س − ٣٦
٢) س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٢٨ س
٣) س^{٣} − ١٠ س^{٢} + ٢٤ س
٤) ٢ س^{٢} − ١٨ س + ٣٦
٥) ٥ حـ^{٢} − ١٠ حـ − ١٥
٦) ٣ أ^{٣} − ١٢ أ^{٢} − ٦٣ أ
٧) ٣ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٦٠ س
٨) أ^{٢} − ٢٤ ب^{٢} − ٢ أ ب
٩) ٥ س ص + ٤ ص^{٢} + س^{٢}
١٠) س^{٣} − ٢٨ س − ٣ س^{٢}
١١) ١٨ س − ١٥ س^{٢} + ٣ س^{٣}
١٢) ء^{٢} + ٥٦ − ١٥ ء
١٣) −٢ س^{٢} − ٢ س + ٤٠
١٤) م (م + ٧) − ١٨
١٥) س (س + ٢) − ٣ (٢ س + ٧)
١٦) (أ + ٢ ب)^{٢} + أ ب
١٧) (س + ٢ ص) (س − ٣ ص) + ٢ س ص
١٨) (أ − ٤ ب) (أ + ٤ ب) + ٦ أ ب
١٩) (س − ٤) (س − ٩) − ٢ (س + ٥)
٢٠) س ص (س ص − ١) − ٩٠

٣ أوجد قيمة العدد حـ $\in$ ص$^{+}$ **بحيث يكون المقدار قابلاً للتحليل وحلله :**

① س^{٢} + حـ س − ١٥	② ص^{٢} − حـ ص + ٢٩
③ م^{٢} + م − حـ	④ س^{٢} − ٧ س + حـ

٤ أكمل العبارات الآتية :

① س^{٢} − ٣ س − ١٨ = (س + ...) (س − ....)

② ك^{٤} − ٥ ك^{٢} − ١٤ = (ك^{٢} − ......) (ك^{٢} + ...)

③ م^{٢} + ...+ ١٢ = (م + ٢) (....... + ...)

④ **إذا كان:** (س + ٣) **أحد عوامل المقدار:** (س^{٢} − س − ١٢) **فإن العامل الآخر هو** ....

⑤ **إذا كان:** س + ٢ ص = ٣ ، س − ص = ٨ **فإن** : س^{٢} + س ص − ٢ ص^{٢} = ...

⑥ حـ^{٢} + ... − ٨ = (حـ − ....) (حـ + ٤)

⑦ **إذا كان:** حـ^{٢} − ٤ حـ ء − ٢١ ء^{٢} = ٤٥ ، حـ − ٧ ء = ٩ **فإن** : حـ + ٣ ء = ...

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ المقدار: س^{٢} + ٧س + ك **يكون قابلاً للتحليل إذا كانت** ك =............

① ٨ ② ١٠ ③ ١٨ ④ ٤٩

٢ المقدار: س^{٢} − ٥ س + حـ **يكون قابلاً للتحليل إذا كانت** حـ =............

① ٢ ② ٣ ③ ٤ ④ ٥

٣ المقدار: س^{٢} + ب س + ١٢ **يكون قابلاً للتحليل إذا كانت** ب =............

① ١ ② ٤ ③ ٧ ④ ١٠

٤ إذا كان المقدار: س^{٢} − ٩ س + ء **قابلاً للتحليل فإن:** ء **يمكن أن تساوي**............

① ٤ ② ١٠ ③ ١٢ ④ ١٨

٥ إذا كان المقدار: س^{٢} − ٢ س − حـ **قابلاً للتحليل فإن** : حـ $\neq$............

① ٣ ② ١٥ ③ ٣٠ ④ ٦٣

الدرس الثاني

تحليل المقدار الثلاثي غير البسيط

المقدار الثلاثي غير البسيط يكون على الصورة:

أ س^{٢} + ب س + حـ   حيث أ $\neq \pm$ ١

مثـــــال

حل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

① ١٠ س^{٢} − ٢٣ س + ١٢

② ٢ س^{٢} + ٥ س ص + ٢ ص^{٢}

③ ٤ س^{٢} + ١٧ س − ١٥

④ ٦ س^{٢} − ٥ س ص − ٦ ص^{٢}

الحـــــل

① ١٠ س^{٢} − ٢٣ س + ١٢

المحاولة الأولى		
(س	−	١٢)
(١٠ س	−	١)
− ١٢٠ س		− س
− ١٢١ س		
محاولة خاطئة		

المحاولة الثانية		
(س	−	٤)
(١٠ س	−	٣)
− ٤٠ س		− ٣ س
− ٤٣ س		
محاولة خاطئة		

المحاولة الثالثة		
(٢ س	−	٣)
(٥ س	−	٤)
− ١٥ س		− ٨ س
− ٢ س		
محاولة صحيحة		

∴ ١٠ س^{٢} − ٢٣ س + ١٢ = (٢ س − ٣) (٥ س − ٤)

---

② ٢ س^{٢} + ٥ س ص + ٢ ص^{٢}

المحاولة الأولى		
(٢ س	+	ص)
(س	+	٢ ص)
س ص		٤ س ص
س ص		
محاولة صحيحة		

∴ ٢ س^{٢} + ٥ س ص + ٢ ص^{٢} = (٢ س + ص) (س + ٢ ص)

(٣) ٤س^{٢} + ١٧س − ١٥

المحاولة الأولى		
(٤س	−	١)
(س	+	١٥)
−س		٦٠س
٥٩س		
محاولة خاطئة		

المحاولة الثانية		
(٤س	−	١٥)
(س	+	١)
−١٥س		٤س
−١١س		
محاولة خاطئة		

المحاولة الثالثة		
(٤س	−	٣)
(س	+	٥)
−٣س		٢٠س
١٧س		
محاولة صحيحة		

∴ ٤س^{٢} + ١٧س − ١٥ = (٤س − ٣)(س + ٥)

---

(٤) ٦س^{٢} + ٥س ص − ٦ص^{٢}

المحاولة الأولى		
(٦س	−	ص)
(س	+	٦ص)
−س ص		٣٦س ص
٣٥س ص		
محاولة خاطئة		

المحاولة الثانية		
(٢س	−	٣ص)
(٣س	+	٢ص)
٩س ص		−٤س ص
٥س ص		
محاولة صحيحة		

∴ ٦س^{٢} + ٥س ص − ٦ص^{٢} = (٢س − ٣ص)(٣س + ٢ص)

تدريب

حل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

(١) ٦أ^{٢} − أ − ٢

= ....

(٢) ١٢س^{٢} − ١٩س ص + ٤ص^{٢}

= ....

☠ ملاحظات ☠

عند تحليل المقدار الثلاثي يجب إتباع الخطوات الآتية :

(١) فك الأقواس و الاختصار.

(٢) ترتيب حدود المقدار تنازلياً حسب أس أحد الرموز المعطاة.

(٣) التحليل بإخراج (ع.م.أ)

مثـــال

حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

① ٦ أ - ٢٧ + ٥ أ^{٢}

② ١٢س^{٤} + ٢٢س^{٣} + ٦س^{٢}

③ ١٨ س^{٣} - ١٥ س + ٣٩ س^{٢}

④ (١٠ س + ص) (س + ص) - ٧ ص^{٢}

الحـــل

① ١١ أ + ٦ + ٣ أ^{٢}

= ٥ أ^{٢} + ١١ أ + ٦ (الترتيب التنازلي)

= (٣ أ + ٢) (أ + ٣)

③ ١٨ س^{٣} - ١٥ س + ٣٩ س^{٢}

= ١٨س^{٣} + ٣٩س^{٢} - ١٥س (الترتيب التنازلي)

= ٣س (٦س^{٢} + ١٣س - ٥) (ع.م.أ)

= ٣س (٣س - ١) (٢س + ٥)

② ١٢س^{٤} + ٢٢س^{٣} + ٦س^{٢}

= ٢س^{٢} (٦س^{٢} + ١١س + ٣) (ع.م.أ)

= ٢س (٢س + ٣) (٣س + ١)

④ (١٠ س + ص) (س + ص) - ٧ ص^{٢}

= ١٠س^{٢} + ١١س ص + ص^{٢} - ٧ص^{٢} (فك الاقواس)

= ١٠س^{٢} + ١١س ص - ٦ص^{٢} (الإختصار)

= (٢س + ٣ص) (٥س - ٢ص)

مثـــال

حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً :

① ١٠ (أ + ب) س^{٣} + ٢٥ (أ + ب) س^{٢} + ١٥ (أ + ب) س

② (١٠س + ص) (س + ص) - ٧ص^{٢}

الحـــل

① ١٠ (أ + ب) س^{٣} + ٢٥ (أ + ب) س^{٢} + ١٥ (أ + ب) س

= ٥س (أ + ب) (٢س^{٢} + ٥س + ٢)

= ٥س (أ + ب) (٢س + ١) (س + ٢)

② (١٠س + ص) (س + ص) - ٧ص^{٢}

= ١٠س^{٢} + ١١س ص + ص^{٢} - ٧ص^{٢}

= ١٠س^{٢} + ١١س ص - ٦ص^{٢}

= (٥س - ٢ص) (٢س + ٣ص)

تمارين على الدرس الثاني

❶ حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً:

① ٢س^{٢} − ١٣س + ١٥
② ٦س^{٢} − ٢٣س + ٢٠
③ ١٥أ^{٢} − ١٩أ + ٦
④ ٥ح^{٢} − ٢٢ح + ٨
⑤ ٣س^{٤} − ١٧س^{٢} + ١٠
⑥ ٣س^{٢}ص^{٢} − ١١س ص + ١٠
⑦ ٥س^{٢} − ١٤س ص + ٨ص^{٢}
⑧ ٥أ^{٢} − ٢٢أ ب + ٨ب^{٢}
⑨ ٢ص^{٤} − ٩ص^{٢} + ١٠
⑩ ١٢ح^{٢}ء^{٢} − ٢٣ح ء هـ + ١٠هـ^{٢}
⑪ ٢س^{٦} + ٧س^{٣}ص^{٢} − ١٥ص^{٤}
⑫ ٣أ^{٢}ب^{٤} + ١٠أ ب^{٢}ح^{٣} − ٨ح^{٦}
⑬ ٣ك^{٢} − ١٠ك م − ٨م^{٢}
⑭ ٥ل^{٢}م^{٢} − ٢ل م ن − ٣ن^{٢}
⑮ ٣س^{٢} − س ص − ١٠ص^{٢}
⑯ ٢أ^{٢}ب^{٢} + أ ب − ٢١
⑰ ٣هـ^{٢} + ٤هـ ل − ٣٢ل^{٢}
⑱ ٦أ^{٢}ب^{٤} − ٥أ ب^{٢}ح − ٦ح^{٢}
⑲ ١٥م^{٢}ن^{٤} + ٧م ن^{٢} − ٤
⑳ ٢س^{٢} + ٧س ص + ٣ص^{٢}

❷ حلل كلاً مما يأتي تحليلا تاماً:

① ٢٥م − ١٠ + ١٥م^{٢}
② ٢٠س − ٨س^{٣} + ٢٧س^{٢}
③ ٢١س^{٢}ص^{٢} + ٦س^{٢}ص^{٣} − ١٥س^{٢}ص^{٤}
④ ١٨س^{٥} + ٣٣س^{٣} − ٣٠س
⑤ ٨س + ٦س^{٣} + ١٤س^{٢}
⑥ ٢س (س + ٣) + ١٣س + ٢٤
⑦ ٤س (٣س + ٧ص) − ٥ص^{٢}
⑧ ٥ص^{٢} − ٤س (٧ص + ٣س)
⑨ (٥ك − ٢)^{٢} − ٤ك − ٥
⑩ ٢(أ + ب)س^{٢} − ٥(أ + ب)س + ٢(أ + ب)

❸ أوجد قيمة ك التي تجعل كلاً من المقادير الآتية قابلاً للتحليل حيث ك عدد صحيح:

① ٢س^{٢} + ك س + ٥
② ٣س^{٢} + ك س − ١٠
③ ٢س^{٢} + ٥س + ك
④ ١٤س^{٢} − ١١س + ك
⑤ ك س^{٢} + ٥س − ٤
⑥ ك س^{٢} − ١١س − ٢١

❹ إذا كان: (س + ٢) أحد عاملي المقدار (٣س^{٢} − س − ١٤) فأوجد العامل الآخر.

❺ مستطيل مساحته (٣س^{٢} − ٧س − ٥) وحدة مساحة وأحد بعداه (٣س − ٥) وحدة طول أوجد بعده الآخر حيث س $> \frac{٥}{٣}$

الدرس الثالث

تحليل المقدار الثلاثي المربع الكامل

تذكر أن : $(٢س + ٣)^{٢} = ٤س^{٢} + ١٢س + ٩$

وأيضاً : $(٥س - ٢ص)^{٢} = ٢٥س^{٢} - ٢٠س ص + ٤ص^{٢}$

كل من المقدارين: $(٤س^{٢} + ١٢س + ٩)$ ، $(٢٥س^{٢} - ٢٠س ص + ٤ص^{٢})$

يسمى مقدار ثلاثي مربع كامل هو يتميز بالآتي :

(١) الحد الأول : مربع كامل موجب.

(٢) الحد الثالث : مربع كامل موجب .

(٣) الحد الأوسط $= \pm \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثاني}} \times ٢$

مثال

بين أي المقادير الآتية مربعاً كاملاً وأيها ليس مربعاً كاملاً :

① $٩س^{٢} - ١٢س ص + ٤ص^{٢}$	② $٢٥م^{٢} - ٥م + ١$
③ $٤س^{٢} - ٢٠س - ٢٥$	④ $س^{٢} - ٦س ص + ٩ص^{٢}$

الحل

① $٩س^{٢} - ١٢س ص + ٤ص^{٢}$

∵ الحد الأول مربع كامل موجب

، ∵ الحد الثالث مربع كامل موجب

، الحد الأوسط $= \pm \sqrt{٩س^{٢}} \times \sqrt{٤ص^{٢}} \times ٢$

$= \pm ٣س \times ٢ص \times ٢ = \pm ١٢س ص$

∴ المقدار مربع كامل .

② $٢٥م^{٢} - ٥م + ١$

∵ الحد الأول مربع كامل موجب

، ∵ الحد الثالث مربع كامل موجب

، الحد الأوسط $= \pm \sqrt{٢٥م^{٢}} \times \sqrt{١} \times ٢$

$= \pm ٥م \times ١ \times ٢ = \pm ١٠س \neq \pm ٥م$

∴ المقدار ليس مربع كامل .

③ $٤س^{٢} - ٢٠س - ٢٥$

∵ الحد الأول مربع كامل موجب

، ∵ الحد الثالث مربع كامل <u>غير</u> موجب

∴ المقدار ليس مربع كامل .

④ $س^{٢} - ٦س ص + ٩ص^{٢}$

∵ الحد الأول مربع كامل موجب

، ∵ الحد الثالث مربع كامل موجب

، الحد الأوسط $= \pm \sqrt{س^{٢}} \times \sqrt{٩ص^{٢}} \times ٢$

$= \pm س \times ٣ص \times ٢ = \pm ٦س ص$

∴ المقدار مربع كامل .

walid zawal

☎

ملاحظات هامة:

إذا كان المقدار الثلاثي مربعاً كاملاً فإن :

(١) الحد الأوسط $= \pm \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثاني}} \times ٢$

(٢) الحد الأول $= \dfrac{(\text{الحد الأوسط})^٢}{\text{الحد الثالث} \times ٤}$

(٣) الحد الثالث $= \dfrac{(\text{الحد الأوسط})^٢}{\text{الحد الأول} \times ٤}$

مثـــــال

أكمل الحد الناقص في كل من المقادير الآتية ليكون مربعاً كاملاً:

① $٢٥\text{س}^٢ + \ldots\ldots\ldots + ٩\text{ص}^٢$

② $\frac{١}{٤}\text{أ}^٢ - \ldots\ldots\ldots + ٩$

③ $\ldots\ldots\ldots + ٢٨\text{س ص} + ٤٩\text{ص}^٢$

④ $٤\text{حـ}^٢ - \text{حـ ء} + \ldots\ldots\ldots$

الحـــــل

① $٢٥\text{س}^٢ + \ldots\ldots\ldots + ٩\text{ص}^٢$

∵ الحد الأوسط $= \pm \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثاني}} \times ٢$

∴ الحد الأوسط $= \pm ٥\text{س} \times ٣\text{ص} \times ٢$

∴ الحد الأوسط $= \pm ٣٠\text{س ص}$

③ $\ldots\ldots\ldots + ٢٨\text{س ص} + ٤٩\text{ص}^٢$

∵ الحد الأول $= \dfrac{(\text{الحد الأوسط})^٢}{\text{الحد الثالث} \times ٤}$

∵ الحد الأول $= \dfrac{٢٨\text{س ص} \times ٢٨\text{س ص}}{٤٩\text{ص}^٢ \times ٤}$

∵ الحد الأول $= ٤\text{س}^٢$

② $\frac{١}{٤}\text{أ}^٢ - \ldots\ldots\ldots + ٩$

∵ الحد الأوسط $= \pm \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثاني}} \times ٢$

∴ الحد الأوسط $= \pm \frac{١}{٢}\text{أ} \times ٣ \times ٢$

∴ الحد الأوسط $= \pm ٣\text{أ}$

④ $٤\text{حـ}^٢ - \text{حـ ء} + \ldots\ldots\ldots$

∵ الحد الثالث $= \dfrac{(\text{الحد الأوسط})^٢}{\text{الحد الأول} \times ٤}$

∵ الحد الثالث $= \dfrac{-\text{حـ ء} \times -\text{حـ ء}}{٤\text{حـ}^٢ \times ٤}$

∵ الحد الثالث $= \frac{١}{١٦}\text{ء}^٢$

مثال

أوجد قيمة ك الموجبة التي تجعل كل من المقادير الآتية مربعاً كاملاً:

(١) $\text{٢٥ س}^{٢} + \text{ك س ص} + \text{١٦ ص}^{٢}$

(٢) $\text{ك أ}^{٢} - \text{١٠ أ ب} + \text{٢٥ ب}^{٢}$

(٣) $\text{٩ م}^{٢} - \text{ك م ن} + \text{٤ ن}^{٢}$

(٤) $\text{٤٩ س}^{٢} - \text{٧٠ س ص} + \text{ك ص}^{٢}$

الحل

(١) $\text{٢٥ س}^{٢} + \text{ك س ص} + \text{١٦ ص}^{٢}$

∵ $\text{الحد الأوسط} = \pm \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثاني}} \times ٢$

∴ $\text{ك س ص} = \pm \text{٥ س} \times \text{٤ ص} \times ٢$

∴ $\text{ك س ص} = \pm \text{٤٠ س ص}$

∴ $\text{ك} = \pm ٤٠$

∴ $\text{ك الموجبة} = ٤٠$

(٣) $\text{٩ م}^{٢} - \text{ك م ن} + \text{٤ ن}^{٢}$

∵ $\text{الحد الأوسط} = \pm \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثاني}} \times ٢$

∴ $\text{ك م ن} = \pm \text{٣ م} \times \text{٢ ن} \times ٢$

∴ $\text{ك م ن} = \pm \text{١٢ م ن}$

∴ $\text{ك} = \pm ١٢$

∴ $\text{ك الموجبة} = ١٢$

(٢) $\text{ك أ}^{٢} - \text{١٠ أ ب} + \text{٢٥ ب}^{٢}$

∵ $\text{الحد الأول} = \dfrac{(\text{الحد الأوسط})^{٢}}{\text{الحد الثالث} \times ٤}$

∵ $\text{ك أ}^{٢} = \dfrac{-\text{١٠ أ ب} \times -\text{١٠ أ ب}}{\text{٢٥ ب}^{٢} \times ٤}$

∵ $\text{ك أ}^{٢} = \text{أ}^{٢}$

∴ $\text{أ} = ١$

(٤) $\text{٤٩ س}^{٢} - \text{٧٠ س ص} + \text{ك ص}^{٢}$

∵ $\text{الحد الثالث} = \dfrac{(\text{الحد الأوسط})^{٢}}{\text{الحد الأول} \times ٤}$

∵ $\text{ك ص}^{٢} = \dfrac{-\text{٧٠ س ص} \times -\text{٧٠ س ص}}{\text{٤٩ س}^{٢} \times ٤}$

∵ $\text{ك ص}^{٢} = \text{١٠٠ ص}^{٢}$

∴ $\text{ك} = ١٠٠$

تحليل المقدار الثلاثي المربع الكامل

إذا كان المقدار الثلاثي مربعاً كاملاً فإنه يمكن تحليله عل الصورة :

$$\left(\sqrt{\text{الحد الأول}} \; \boxed{\text{نفس إشارة الحد الأوسط}} \; \sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)^{٢}$$

ملاحظة هامة:

يجب التأكد أولاً من أن المقدار الثلاثي مربعاً كاملاً قبل استخدام طريقة التحليل السابقة.

يجب اتباع نفس خطوات التحليل التي سبق ذكرها في صفحة رقم ٣ ، صفحة رقم ٩ .

مثال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① ٤س^{٢} − ١٢س ص + ٩ص^{٢}

③ ٢٨س − ٤٩س^{٢} − ٤

⑤ $\frac{١}{٩}$س^{٢} + $\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٤}$

② ٢٥أ^{٤} + ٤٠أ^{٢}ب^{٢} + ١٦ب^{٤}

④ ١ + ٠,٠١ك^{٢} − ٠,٢ك

⑥ ١٨س^{٢} + ٣٢ − ٤٨س

الحل

① ٤س^{٢} − ١٢س ص + ٩ص^{٢}
= (٢س − ٣ص)^{٢}

③ ٢٨س − ٤٩س^{٢} − ٤
= −٤٩س^{٢} + ٢٨س − ٤
= −(٤٩س^{٢} − ٢٨س + ٤)
= −(٧س − ٢)^{٢}

⑤ $\frac{١}{٩}$س^{٢} + $\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٤}$
= ($\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٢}$)^{٢}

② ٢٥أ^{٤} + ٤٠أ^{٢}ب^{٢} + ١٦ب^{٤}
= (٥أ^{٢} + ٤ب^{٢})^{٢}

④ ١ + ٠,٠١ك^{٢} − ٠,٢ك
= ٠,٠١ك^{٢} − ٠,٢ك + ١
= (٠,١ك − ١)^{٢}

⑥ ١٨س^{٢} + ٣٢ − ٤٨س
= ١٨س^{٢} − ٤٨س + ٣٢
= ٢(٩س^{٢} − ٢٤س + ١٦)
= ٢(٣س − ٤)^{٢}

مثال

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتي:

① (٩٣)^{٢} + ٢×٩٣×١٠٧ + (١٠٧)^{٢}

② (٢٠,٧)^{٢} − ١,٤×٢٠,٧ + (٠,٧)^{٢}

③ ٢٥ − ٢ × ٤٥ + ٨١

الحل

① (٩٣)^{٢} + ٢×٩٣×١٠٧ + (١٠٧)^{٢} = (٩٣ + ١٠٧)^{٢} = (٢٠٠)^{٢} = ٤٠٠٠٠	لاحظ أن :
② (٢٠,٧)^{٢} − ١,٤×٢٠,٧ + (٠,٧)^{٢} = (٢٠,٧)^{٢} − ٢ × ٢٠,٧ × ٠,٧ + (٠,٧)^{٢} = (٢٠,٧ − ٠,٧)^{٢} = (٢٠)^{٢} = ٤٠٠	١,٤ = ٢ × ٠,٧
③ ٢٥ − ٢ × ٤٥ + ٨١ = (٥)^{٢} − ٢ × ٥ × ٩ + (٩)^{٢} = (٥ − ٩)^{٢} = (−٤)^{٢} = ١٦	٢٥ = (٥)^{٢} ، ٤٥ = ٥ × ٩ ، ٨١ = (٩)^{٢}

تمارين على الدرس الثالث

❶ بين أي المقادير الآتية مربعاً كاملاً وأيها ليس مربعاً كاملاً :

① ٢٥س^{٢} − ١٥س + ٩

② س^{٢} − ١٢س + ٣٦

③ ٤س^{٢} + ٤س − ١

④ ح^{٢} − ٨ح + ١٦

⑤ $\frac{١}{٤}$ص^{٢} − ص + ٤

⑥ ٠,٠١ س^{٢} − ٠,٢ س + ١

❷ أكمل الحد الناقص في كل من المقادير الآتية ليكون مربعاً كاملاً:

① ٤س^{٢} .... + ١

② ٢٥م^{٢} + ٢٠م ن ....

③ أ^{٢} − ٦أ ب + ...

④ ع^{٤} .... + ٤٩ل^{٢}

⑤ .... − ١٨ص^{٢} + ٨١

⑥ $\frac{١}{٢٥}$س^{٢} .... + $\frac{١}{٤}$ص^{٢}

⑦ ٩س^{٢} .... + ١٦ص^{٢}

⑧ ٢٥س^{٢} + ٣٠س ص + ...

⑨ .... + ٢٠س + ٤

⑩ ١٦أ^{٢} .... + ٩ب^{٢}

⑪ .... + ٦س ص + ١

⑫ .... + ٦س ص + ١

❸ أوجد قيمة ك الموجبة التي تجعل كل من المقادير الآتية مربعاً كاملاً:

① ك س^{٢} − ٦س + ١

② ٤س^{٢} − ٢٨س ص + ك ص^{٢}

③ ٢٥أ^{٢} − ك أ ب + ٩ب^{٢}

④ ك م^{٢} + ٨م ن + ١٦

⑤ ٤س^{٢} + ١٢س + ك^{٢}

⑥ ٨١أ^{٤} + ك أ^{٢}ب + ٢٥ب^{٢}

⑦ ١٦ص^{٢} + ك ص + ١٠٠

⑧ ك أ^{٢}ب^{٢} − ١٢أ ب + ٩

⑨ ٣٦س^{٢} + ك س + ١

⑩ ٤٩س^{٢} − ٢ك س + ٩

⑪ ٢٥س^{٢} + ٤٠س + ك

⑫ ٤س^{٢} + ١٢س + ك^{٢}

❹ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① حـ^{٢} + ١٠ حـ + ٢٥
② ٤أ^{٢} ب^{٢} − ١٢أ ب حـ + ٩ حـ^{٢}
③ ٩س^{٢} − ٣٠س + ٢٥
④ ٨١س^{٢} − ٩٠س ص + ٢٥ص^{٢}
⑤ ٢٥أ^{٢} + ٤٠أ ب + ١٦ ب^{٢}
⑥ ٤أ^{٢} ب^{٢} − ١٢ أ ب + ٩
⑦ ٩س^{٢} + ٢٤ س ص + ١٦ ص^{٢}
⑧ ٣٦ س^{٢} + ٦٠ س + ٢٥
⑨ $\frac{١}{٩}$ س^{٢} + $\frac{٢}{١٥}$ س ص + $\frac{١}{٢٥}$ ص^{٢}
⑩ $\frac{١}{١٦}$ أ^{٤} + أ^{٢} ب^{٣} + ٤ ب^{٦}
⑪ س^{٢} + ٤ + ٤س
⑫ ٢٥أ^{٢} + ٤ ب^{٢} + ٢٠أ ب
⑬ ١٨س^{٣}ص + ٢٤س^{٢} ص^{٢} + ٨س ص^{٣}
⑭ ٣س^{٣} + ١٨س^{٢} + ٢٧س
⑮ ٦٠س − ٢٠س^{٢} − ٤٥
⑯ ٢أ − ١ − أ^{٢}
⑰ ٢٧س^{٢} + ٣٦س ص + ١٢ ص^{٢}
⑱ ١٠س ص − س^{٢} − ٢٥ص^{٢}

❺ استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتي:

① (٣٥)^{٢} + ٢ × ٣٥ × ١٥ + (١٥)^{٢}
② (٧٣)^{٢} − ٢ × ٧٣ × ٦٣ + (٦٣)^{٢}
③ (١٨)^{٢} + ٢ × ١٨ × ١٢ + (١٢)^{٢}
④ (٩٩)^{٢} + ٢ × ٩٩ + ١
⑤ (٦١)^{٢} − ٢ × ٦١ + ١
⑥ (١٠١)^{٢} − ٢ × ١٠١ + ١
⑦ (٢٠,٧)^{٢} − ١,٤ × ٢٠,٧ + (٠,٧)^{٢}
⑧ (٧,٣)^{٢} + ٢ × ٧,٣ × ٢,٧ + (٢,٧)^{٢}

❻ مربع مساحته (١٦س^{٢} + ٤٠س + م) سم^{٢} أوجد قيمة م

ثم أوجد محيطه عندما س = ١

❼ مربع مساحته (ك س^{٢} + ٣٠س ص + ٩ ص^{٢}) سم^{٢} أوجد قيمة ك

ثم أوجد محيطه عندما س = ٢ ، ص = ١

الدرس الرابع

تحليل الفرق بين مربعين

تذكر أن : $(٥س+٣)(٥س-٣)=٢٥س^{٢}-٩ص^{٢}$

$٢٥س^{٢}=(٥س)^{٢}$ **أي ان الحد الجبري:** $٢٥س^{٢}$ **هو مربع الحد الجبري :** $٥س$

، وكذلك : $٩ص^{٢}=(٣ص)^{٢}$ **أي أن : الحد الجبري:** $٩ص^{٢}$ **هو مربع الحد الجبري:** $٣ص$

أي أن : الحدين الجبريين $٢٥س^{٢}$ **،** ٩ **هما مربعين لحدين جبرين آخرين.**

ولما كانت الإشارة بينهما سالبة (فرق) فإن المقدار : $(٢٥س^{٢}-٩ص^{٢})$ **يسمى فرق بين مربعين و هو يتميز بالآتي :**

(٤) الحد الأول : مربع كامل.

(٥) الحد الثالث : مربع كامل.

(٦) الإشارة بين الحدين : إشارة سالبة.

مثـــــال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $س^{٢}-٢٥$

② $٩أ^{٢}-١٦ب^{٢}$

③ $١٠٠س^{٢}-ص^{٤}$

④ $٤٩ك^{٤}-٣٦م^{٦}$

⑤ $\frac{س^{٢}}{٤}-\frac{٩ص^{٢}}{١٦ع^{٢}}$

⑥ $\frac{١}{٩}س^{٢}-\frac{١}{٤}ص^{٢}$

الحـــــل

① $س^{٢}-٢٥$

$=(س-٥)(س+٥)$

② $٩أ^{٢}-١٦ب^{٢}$

$=(٣أ-٤ب)(٣أ+٤ب)$

③ $١٠٠س^{٢}-ص^{٤}$

$=(١٠س-ص^{٢})(١٠س+ص^{٢})$

④ $٤٩ك^{٤}-٣٦م^{٦}$

$=(٧ك^{٢}-٦م^{٣})(٧ك^{٢}+٦م^{٣})$

⑤ $\frac{س^{٢}}{٤}-\frac{٩ص^{٢}}{١٦ع^{٢}}$

$=(\frac{س}{٢}-\frac{٣ص}{٤ع})(\frac{س}{٢}+\frac{٣ص}{٤ع})$

⑥ $\frac{١}{٩}س^{٢}-\frac{١}{٤}ص^{٢}$

$=(\frac{١}{٣}س-\frac{١}{٢}ص)(\frac{١}{٣}س+\frac{١}{٢}ص)$

> لا تحسبن المجد تمراً أنت لاعقه
>
> لن تنال المجد حتى تلعق الصبر.

مثـــــال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $٢س^٢ - ٥٠ص^٢$
② $س^٣ - ١٦س ص^٢$
③ $٣س^٣ - ١٢س ص^٢$
④ $١٨س^٢ ص - ٥٠ع^٢ ص$
⑤ $\frac{١}{٢}س^٢ - ٢$
⑥ $\frac{١}{٣}س^٣ - ٢٧س$

الحـــــل

① $٢س^٢ - ٥٠ص^٢$
$= ٢(س^٢ - ٢٥ص^٢)$
$= ٢(س - ٥ص)(س + ٥ص)$

② $س^٣ - ١٦س ص^٢$
$= س(س^٢ - ١٦ص^٢)$
$= س(س - ٤ص)(س + ٤ص)$

③ $٣س^٣ - ١٢س ص^٢$
$= ٣س(س^٢ - ٤ص^٢)$
$= ٣س(س - ٢ص)(س + ٢ص)$

④ $١٨س^٢ ص - ٥٠ع^٢ ص$
$= ٢ص(٩س^٢ - ٢٥ع^٢)$
$= ٢ص(٣س - ٥ع)(٣س + ٥ع)$

⑤ $\frac{١}{٢}س^٢ - ٢$
$= \frac{١}{٢}(س^٢ - ٤)$
$= \frac{١}{٢}(س - ٢)(س + ٢)$

⑥ $\frac{١}{٣}س^٣ - ٢٧س$
$= \frac{١}{٣}س(س^٢ - ٨١)$
$= \frac{١}{٣}س(س - ٩)(س + ٩)$

مثـــــال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $١٦م^٤ - ٨١$
② $م^٤ - ١$
③ $س^٤ - ٥س^٢ ص^٢ + ٤ص^٤$
④ $٤س^٤ + ٨س^٢ ص^٢ - ٩ص^٤$

الحـــــل

① $١٦م^٤ - ٨١$
$= (٤م^٢ - ٩)(٤م^٢ + ٩)$
$= (٢م - ٣)(٢م + ٣)(٤م^٢ + ٩)$

② $م^٤ - ١$
$= (م^٢ - ١)(م^٢ + ١)$
$= (م - ١)(م + ١)(م^٢ + ١)$

③ $س^٤ - ٥س^٢ ص^٢ + ٤ص^٤$
$= (س^٢ - ص^٢)(س^٢ - ٤ص^٢)$
$= (س - ص)(س + ص)(س - ٢ص)(س - ٢ص)$

④ $س^٤ + ٨س^٢ ص^٢ - ٩ص^٤$
$= (س^٢ - ص^٢)(س^٢ + ٩ص^٢)$
$= (س - ص)(س + ص)(س^٢ + ٩ص^٢)$

مثال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① (س+ص)^{٢} − ١
② ٢٥ك^{٢} (ك+٣م) − ٩ (ك+٣م)
③ (٢س−٣)^{٢} − (س+١)^{٢}
④ ٤أ^{٢} (أ+٣ب)^{٣} − ٩ (أ+٣ب)

الحل

① (س+ص)^{٢} − ١
= (س+ص+١)(س+ص−١)

③ (٢س−٣)^{٢} − (س+١)^{٢}
= [(٢س−٣)+(س+١)]
× [(٢س−٣)−(س+١)]
= (٢س−٣+س+١)(٢س−٣−س−١)
= (٣س−٢)(س−٤)

② ٢٥ك^{٢} (ك+٣م) − ٩ (ك+٣م)
= (ك+٣م)(٢٥ك^{٢} − ٩)
= (ك+٣م)(٥ك+٣)(٥ك−٣)

④ ٤أ^{٢} (أ+٣ب)^{٣} − ٩ (أ+٣ب)
= (أ+٣ب)[٤أ^{٢} (أ+٣ب)^{٢} − ٩]
= (أ+٣ب)[٢أ (أ+٣ب) − ٣]
× [٢أ (أ+٣ب) + ٣]
= (٢أ+٣ب)(٢أ^{٢} + ٦أب − ٣)
× (٢أ^{٢} + ٦أب + ٣)

مثال

استخدم التحليل لتسهيل إيجاد قيمة ما يأتي:

① (٢٥)^{٢} − (١٥)^{٢}
② (٧٧)^{٢} − (٢٣)^{٢}
③ (١٣,٢)^{٢} − (٣,٢)^{٢}
④ (٩٩٩)^{٢} − ١

الحل

① (٢٥)^{٢} − (١٥)^{٢}
= (٢٥−١٥)(٢٥+١٥)
= ١٠ × ٤٠
= ٤٠٠

③ (١٣,٢)^{٢} − (٣,٢)^{٢}
= (١٣,٢−٣,٢)(١٣,٢+٣,٢)
= ١٠ × ١٦,٤
= ١٦٤

② (٧٧)^{٢} − (٢٣)^{٢}
= (٧٧−٢٣)(٧٧+٢٣)
= ٥٤ × ١٠٠
= ٥٤٠٠

④ (٩٩٩)^{٢} − ١
= (٩٩٩−١)(٩٩٩+١)
= ٩٩٨ × ١٠٠٠
= ٩٩٨٠٠٠

مثال

استخدم التحليل لتسهيل إيجاد قيمة ما يأتي:

① ٥٢ × ٤٨
② ١٠٣ × ٩٧

الحل

(١) ٥٢ × ٤٨

=(٥٠+٢)(٥٠-٢)

=(٥٠)^{٢} - (٢)^{٢}

=٢٥٠٠ - ٤

=٢٤٩٦

(٢) ١٠٣ × ٩٧

=(١٠٠+٣)(١٠٠ - ٣)

=(١٠٠)^{٢} - (٣)^{٢}

=١٠٠٠٠ - ٩

=٩٩٩١

مثال

أكمل ما يأتي : موضحاً خطوات الحل

(١) **إذا كان** : س^{٢} - ص^{٢} =٣٦ ، س + ص = ٩ **فإن** : س - ص=.........

(٢) **إذا كان** : س^{٢} - ص^{٢} =٢٨ ، س - ص = ٤ **فإن** : س+ص=.........

(٣) **إذا كان** : س - ص=٣ ، س + ص = ٤ **فإن** : س^{٢} - ص^{٢} =.........

(٤) **إذا كان** : س^{٢} - ص^{٢} =س + ص **فإن** : س - ص=.........

(٥) **إذا كان** : س^{٢} - ص^{٢} =١٢ ، س + ص = ٤ **فإن** : ص - س=.........

الحل

(١) ∵ س^{٢} - ص^{٢} =(س - ص)(س+ص)

∴ ٣٦ =(س - ص)×٩

∴ س - ص = ٣٦ ÷ ٩

∴ س - ص = ٤

(٣) ∵ س^{٢} - ص^{٢} =(س - ص)(س+ص)

∴ س^{٢} - ص^{٢} = ٣ × ٤

∴ س^{٢} - ص^{٢} = ١٢

(٥) ∵ س^{٢} - ص^{٢} =(س - ص)(س+ص)

∴ ١٢ =(س - ص)×٤

∴ س - ص = ١٢ ÷ ٤

∴ س - ص = ٣

∴ ص - س = - ٣

(٢) ∵ س^{٢} - ص^{٢} =(س+ص)(س - ص)

∴ ٢٨ =(س+ص)×٤

∴ س - ص = ٢٨ ÷ ٤

∴ س - ص = ٧

(٤) ∵ س^{٢} - ص^{٢} =(س - ص)(س+ص)

∵ س^{٢} - ص^{٢} =س+ص

∴ س - ص = ١

كيف أدعوك وأنا عاص وكيف لا أدعوك وأنت كريم

تمارين على الدرس الرابع

❶ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $١٦س^{٢} - ٩$
② $٩س^{٢} - ١٠٠ص^{٢}$
③ $١٠٠س^{٢} - ٨١$
④ $٤س^{٢} - ١$
⑤ $٣٦أ^{٢} - ٢٥ب^{٢}$
⑥ $١٦ح^{٤} - ٢٥ء^{٢}$
⑦ $٨١س^{٤} - ٤٩ص^{٤}$
⑧ $ل^{٢} - م^{٤}$
⑨ $\frac{٢٥}{٣٦}س^{٢} - ٦٤ص^{٢}$
⑩ $\frac{٤أ^{٢}}{٩ب^{٤}} - ٢٥$

❷ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $٥س^{٢} - ٢٠$
② $س^{٣} - ٩س$
③ $٢س^{٤}ص - ٣٢س^{٢}ص^{٣}$
④ $س^{٣}ص - سص^{٣}$
⑤ $أب^{٣}ح - أبح^{٣}$
⑥ $٥سصع - ٤٥س^{٣}ص^{٣}ع^{٣}$
⑦ $\frac{١}{٤}س^{٢} - ٩$
⑧ $\frac{١}{٥}س^{٢} - ٥$
⑨ $\frac{١}{٢}س^{٢} - \frac{١}{١٨}ص^{٢}$
⑩ $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٢٧س$

❸ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $ص^{٤} - ١$
② $١٦س^{٤} - ص^{٤}$
③ $س^{٤} - ٦٢٥ص^{٤}$
④ $س^{٤} - ص^{٤}$
⑤ $٤س^{٤} - ٢٩س^{٢}ص^{٢} + ٢٥ص^{٤}$
⑥ $٤س^{٤} - ٣٧س^{٢} + ٩$

❹ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $(أ + ٢ب)^{٢} - ١$
② $٩س^{٢}(س - ٥ص) - ٤(س - ٥ص)$
③ $(ك + ٣)^{٢} - (ك - ٢)^{٢}$
④ $٨١س^{٢}(س + ص) - (س + ص)^{٣}$

❺ استخدم التحليل لتسهيل إيجاد قيمة ما يأتي:

① $(٣٢)^{٢} - (١٨)^{٢}$
② $(٥٥)^{٢} - (٤٥)^{٢}$
③ $(١٨,٦)^{٢} - (١,٤)^{٢}$
④ $(٩٨)^{٢} - ٤$

❻ استخدم التحليل لتسهيل إيجاد قيمة ما يأتي:

① ٣٦×٦٤
② ١٠٥×٩٥
③ ٣١×٢٩
④ ٢٠٣×١٩٧

❼ باستخدام التحليل أوجد قيمة س في كل مما يأتي:

① $(١٠٢)^{٢} - ٤ = ١٠٠ \times س$
② $(٩٩٩)^{٢} - ١ = ٩٩٨٠ \times س$

❽ مثلث قائم الزاوية طول وتره ٤١ سم ، وطول أحد ضلعي القائمة ٤٠ سم .

استخدم التحليل لحساب طول ضلع القائمة الآخر.

---

❾ أكمل العبارات الآتية :

① ٩س^{٢} - .... = (.......... + ٢) (.........- ٢)

② س^{٢} ص^{٢} - ٦٤ = (........+........) (........- ....)

③ .... - ١٦ = (٥س + ...) (٥س - ....)

④ ٤٩أ^{٢} - .... = (.......... + ٢ب) (.........- ٢ب)

⑤ **إذا كان** : س^{٢} - ص^{٢} = ٣٥ ، س+ص = ٧ **فإن**: س - ص = ...

⑥ **إذا كان** : س^{٢} - ص^{٢} = ٢٤ ، س - ص = ٤ **فإن**: س + ص = ...

⑦ **إذا كان** : س - ص = ٦ ، س+ص = ٣ **فإن**: س^{٢} - ص^{٢} = ...

⑧ **إذا كان** : س+ص = ٤ ، س - ص = ٣ **فإن**: س^{٢} - ص^{٢} = ...

⑨ **إذا كان** : س+ص = ٥ ، ص - س = ٦ **فإن** : س^{٢} - ص^{٢} = ...

⑩ **إذا كان** : س+ص = ٧ ، س^{٢} - ص^{٢} = ٤٢ **فإن** : ص - س = ...

⑪ **إذا كان** : ٣س^{٢} - ٣ص^{٢} = ٢٤ ، س+ص = ٢ **فإن** : س - ص = ...

⑫ **إذا كان** : س+ص = ٣ ، ٢س - ٢ص = ٤ **فإن** : س^{٢} - ص^{٢} = ...

⑬ **إذا كان** : (٢٥)^{٢} - (١٥)^{٢} = ١٠ س **فإن** : س = ...

⑭ **إذا كان** : ٥س + ٣ص **أحد عاملي المقدار** : ٢٥س^{٢} - ٩ص^{٢} **فإن العامل الآخر هو**............

⑮ **إذا كان** : ٢أ - ب **أحد عاملي المقدار** : ٤أ^{٢} - ب^{٢} **فإن العامل الآخر هو**............

الدرس الخامس

تحليل مجموع و الفرق بين مكعبين

تذكر أن: $(٢س - ٣)(٤س^{٢} + ٦س + ٩)$

$= ٢س(٤س^{٢} + ٦س + ٩) - ٣(٤س^{٢} + ٦س + ٩)$

$= ٨س^{٣} + ١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢س^{٢} - ١٨س - ٢٧$

$= ٨س^{٣} - ٢٧$

$٨س^{٣} = (٢س)^{٣}$ **أي أن : الحد الجبري** $٨س^{٣}$ **هو مكعب الحد الجبري** $٢س$

، وكذلك : $-٢٧ = (-٣)^{٣}$ **أي أن : الحد الجبري** -٢٧ **هو مربع الحد الجبري** -٣

أي أن : الحدين الجبريين: $٨س^{٣}$ **،** -٢٧ **هما مكعبين لحدين جبرين آخرين.**

ولما كانت الإشارة بينهما سالبة (فرق) فإن المقدار : $(٨س^{٣} - ٢٧)$ **يسمى فرق بين مكعبين . وكذلك المقدار:** $(١٢٥س^{٣} + ص^{٣})$ **يسمى مجموع بين مكعبين**

و هما يتميزان بالآتي :

(٧) الحد الأول : مكعب كامل.

(٨) الحد الثالث : مكعب كامل.

(٩) الإشارة بين الحدين : إشارة سالبة(فرق بين مكعبين) أو موجبة (مجموع مكعبين).

مثـــــال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $س^{٣} - ١٢٥$

② $٢٧أ^{٣} + ٦٤ب^{٣}$

③ $١٠٠٠س^{٣} + ص^{٦}$

④ $ل^{٦} - ٣٤٣م^{٦}$

⑤ $\frac{س^{٣}}{٢٧} - \frac{م^{٣}}{٨ن^{٣}}$

⑥ $\frac{١}{٢٧}ح^{٣} + \frac{١}{٥١٢}ء^{٣}$

الحــــل

① $س^{٣} - ١٢٥$

$= (س - ٥)(س^{٢} + ١٠س + ٢٥)$

② $٢٧أ^{٣} + ٦٤ب^{٣}$

$= (٣أ + ٤ب)(٩أ^{٢} - ١٢أب + ١٦ب^{٢})$

③ $١٠٠٠س^{٣} + ص^{٦}$

$= (١٠س + ص^{٢})(١٠٠س^{٢} - ١٠س ص^{٢} + ص^{٤})$

④ $ل^{٦} - ٣٤٣م^{٦}$

$= (ل^{٢} - ٧م^{٢})(ل^{٤} + ٧ل^{٢}م^{٢} + ٤٩م^{٤})$

⑤ $\frac{ل^{٣}}{٢٧} - \frac{م^{٣}}{٨ن^{٣}}$

$= \left(\frac{ل}{٣} - \frac{م}{٢ن}\right)\left(\frac{ل^{٢}}{٩} + \frac{ل م}{٦ن} + \frac{م^{٢}}{٤ن^{٢}}\right)$

⑥ $\frac{١}{٢٧}ح^{٣} + \frac{١}{٥١٢}ء^{٣}$

$= \left(\frac{١}{٣}ح + \frac{١}{٨}ء\right)\left(\frac{١}{٩}ح^{٢} - \frac{١}{٢٤}ح ء + \frac{١}{٦٤}ء^{٢}\right)$

مثال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

(١) $٣س^{٣} + ٢٤ص^{٣}$

(٢) $س^{٤} + ٢٧س ص^{٣}$

(٣) $٨١س^{٤} ص - ٢٤س ص^{٤}$

(٤) $١٦س^{٣} ع + ٥٤ص^{٣} ع$

(٥) $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٩$

(٦) $\frac{١}{٢}س^{٤} - ٤س$

الحل

(١) $٣س^{٣} + ٢٤ص^{٣}$

$= ٣(س^{٣} + ٨ص^{٣})$

$= ٣(س + ٢ص)(س^{٢} - ٢س ص + ٤ص^{٢})$

(٣) $٨١س^{٤} ص - ٢٤س ص^{٤}$

$= ٣س ص(٢٧س^{٣} - ٨ص^{٣})$

$= ٣س ص(٣س - ٢ص)(٩س^{٢} + ٦س ص + ٤ص^{٢})$

(٥) $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٩$

$= \frac{١}{٣}(س^{٣} - ٢٧)$

$= \frac{١}{٣}(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

(٢) $س^{٤} + ٢٧س ص^{٣}$

$= س(س^{٣} + ٢٧ص^{٣})$

$= س(س + ٣ص)(س^{٢} - ٣س ص + ٩ص^{٢})$

(٤) $١٦س^{٣} ع + ٥٤ص^{٣} ع$

$= ٢ع(٨س^{٣} + ٢٧ص^{٣})$

$= ٢ع(٢س + ٣ص)(٤س^{٢} - ٦س ص + ٩ص^{٢})$

(٦) $\frac{١}{٢}س^{٤} - ٤س$

$= \frac{١}{٢}س(س^{٣} - ٨)$

$= \frac{١}{٢}س(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)$

مثال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

(١) $٦٤أ^{٦} - ب^{٦}$

(٢) $أ^{٦} - ١$

(٣) $س^{٦} - ٧س^{٣}ص^{٣} - ٨ص^{٦}$

(٤) $٢٧س^{٦} + ٢٨س^{٣}ص^{٣} + ص^{٦}$

الحل

(١) $٦٤أ^{٦} - ب^{٦}$

$= (٨أ^{٣} - ب^{٣})(٨أ^{٣} + ب^{٣})$

$= (٢أ - ب)(٤أ^{٢} + ٢أ ب + ب^{٢})$

$\times (٢أ + ب)(٤أ^{٢} - ٢أ ب + ب^{٢})$

(٣) $س^{٦} - ٧س^{٣}ص^{٣} - ٨ص^{٦}$

$= (س^{٣} + ص^{٣})(س^{٣} - ٨ص^{٣})$

$= (س + ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

$\times (س - ٢ص)(س^{٢} + ٢س ص + ٤ص^{٢})$

(٢) $أ^{٦} - ١$

$= (أ^{٣} - ١)(أ^{٣} + ١)$

$= (أ - ١)(أ^{٢} + أ + ١)$

$\times (أ + ١)(أ^{٢} - أ + ١)$

(٤) $٢٧س^{٦} + ٢٨س^{٣}ص^{٣} + ص^{٦}$

$= (٢٧س^{٣} + ص^{٣})(س^{٣} + ص^{٣})$

$= (٣س + ص)(٩س^{٢} - ٣س ص + ص^{٢})$

$\times (س + ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

مثال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $٢٧أ^{٣}(أ+٣ب)-٨(أ+٣ب)$

② $(س+ص)^{٣}-ص^{٣}$

③ $(س+٥)^{٤}-س-٥$

④ $(٢س+١)^{٣}-(س-٢)^{٣}$

الحل

① $٢٧أ^{٣}(أ+٣ب)-٨(أ+٣ب)$

$=(أ+٣ب)(٢٧أ^{٣}-٨)$

$=(أ+٣ب)(٣أ-٢)(٩أ^{٢}+٦أ+٤)$

---

② $(س+ص)^{٣}-ص^{٣}$

$=[(س+ص)-ص][(س+ص)^{٢}+ص(س+ص)+ص^{٢}]$

$=(س+ص-ص)(س^{٢}+٢سص+ص^{٢}+سص+ص^{٢}+ص^{٢})$

$=س(س^{٢}+٣سص+٣ص^{٢})$

---

③ $(س+٥)^{٤}-س-٥$

$=(س+٥)^{٤}-(س+٥)$

$=(س+٥)[(س+٥)^{٣}-١]$

$=(س+٥)[(س+٥)^{٢}+(س+٥)+١]$

$=(س+٥)(س^{٢}+١٠س+٢٥+س+٥+١)$

$=(س+٥)(س^{٢}+١١س+٣١)$

---

④ $(٢س+١)^{٣}-(س-٢)^{٣}$

$=[(٢س+١)-(س-٢)][(٢س+١)^{٢}+(٢س+١)(س-٢)+(س-٢)^{٢}]$

$=(٢س+١-س+٢)(٤س^{٢}+٤س+١+٢س^{٢}-٣س-٢+س^{٢}-٤س+٤)$

$=(س+٣)(٧س^{٢}-٣س+٣)$

مثال

أكمل ما يأتي : موضحاً خطوات الحل

① **إذا كان** : $س^{٣}-ص^{٣}=٣٥$ ، $س-ص=٥$ **فإن** : $س^{٢}+سص+ص^{٢}=$.........

② **إذا كان** : $س^{٢}+سص+ص^{٢}=٣$ ، $س-ص=٤$ **فإن** : $س^{٣}+ص^{٣}=$.........

③ **إذا كان** : $س^{٣}+ص^{٣}=٢٨$ ، $س+ص=٢$ **فإن** : $س^{٢}-سص+ص^{٢}=$.........

④ **إذا كان** : $س^{٣}+ص^{٣}=٩$ ، $س^{٢}-سص+ص^{٢}=٣$ **فإن** : $س+ص=$.........

⑤ **إذا كان** : $س^{٢}-ص^{٢}=٢٠$ ، $س-ص=٢$ ، $س^{٢}-سص+ص^{٢}=٢٨$

فإن : $س^{٣}+ص^{٣}=$.........

تمارين على الدرس الخامس

❶ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① س^{٣} − ٨
② س^{٣} + ٢١٦
③ ٢٧أ^{٣} − ١٢٥
④ ٨س^{٣} + ٢٧
⑤ ٦٤أ^{٣} − ١٢٥ب^{٣}
⑥ ٨س^{٣} − ٣٤٣ص^{٦}
⑦ ١٠٠٠س^{٣} − ١
⑧ ٥١٢س^{٦} + ص^{٩}
⑨ $\frac{\text{١}}{\text{٨}}$أ^{٣} − ٨ب^{٣}
⑩ $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{٨ص}^{٣}} - \frac{\text{٢٧ع}^{٣}}{\text{١٢٥}}$

❷ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① ٥أ^{٣} − ٤٠ب^{٣}
② أ^{٤}ب + ١٢٥أب^{٤}
③ ٥٤س^{٤}ص − ١٦س ص^{٤}
④ ٢٠٠٠أ^{٣}جـ − ٢ب^{٣}جـ
⑤ ل^{٣}م − ٢٧م^{٤}
⑥ ١٦أ^{٣}ب + ٦٨٦ب^{٤}
⑦ ٨١س^{٤} − ٣٧٥س
⑧ ٣٢أ^{٣}ب^{٣}جـ − ٤جـ
⑨ $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$س^{٣} + ٤
⑩ $\frac{\text{١}}{\text{٥}}$س^{٤} − ٢٥س

❸ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① س^{٦} − ص^{٦}
② س^{١٢} − ص^{٦}
③ س^{٦} − ٣س^{٣} + ٢
④ س^{٦} − ٧س^{٣} − ٨
⑤ ص^{٦} + ٢٦ص^{٣} − ٢٧
⑥ أ^{٦} − ٢٨أ^{٣} + ٢٧

❹ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① (أ + ب)^{٣} + ب^{٣}
② (س + ٥)^{٣} − ١٢٥
③ (س + ٥)^{٣} + (س − ٥)^{٣}
④ (م − ٢ن)^{٣} − ٨ن^{٣}
⑤ (س + ص)^{٣} − (س − ص)^{٣}
⑥ (م + ن) + (م + ن)^{٤}

٩ أكمل العبارات الآتية :

① ٨س^{٣} - .... = (.... - ١) (......................)

② س^{٣} + ... = (......+......) (.......-.......+ ٩)

③ .... - ١٢٥ = (٣س - ....) (......... + ...+٢٥)

④ .... - .... = (........ + ٤) (.......- ١٢س.......+.......)

⑤ **إذا كان** : س^{٣} - ص^{٣} = ١٥ ، س - ص = ٣ **فإن:** س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ...

⑥ **إذا كان** : س^{٣} - ٨ص^{٣} = ٣٦ ، س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} = ٩ **فإن:** س - ٢ص = ...

⑦ **إذا كان** : س - ص = ٦ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣ **فإن:** س^{٣} - ص^{٣} = ...

⑧ **إذا كان** : س - ص = ٤ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٥ **فإن:** ص^{٣} - س^{٣} = ...

⑨ **إذا كان** : س^{٢} - ص^{٢} = ١٨ ، س + ص = ٩ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧

فإن : س^{٣} - ص^{٣} = ...

⑩ **إذا كان** : س - ٢ **أحد عاملي المقدار** : س^{٣} - ٢٧ **فإن العامل الآخر هو**.........

⑪ **إذا كان** : س^{٢} + ٥س + ٢٥ **أحد عاملي المقدار**: س^{٣} - ١٢٥ **فإن العامل الآخر هو**........

⑫ **إذا كان** : ص^{٣} - ك = (ص - ٢) (ص^{٢} + ٢ص + ٤) **فإن** : ك = ...

⑬ **إذا كان** : أ^{٣} + ٢٧ = (أ + ٣) (أ^{٢} + م أ + ٩) **فإن** : م = ...

الشهد في الرياضيات

الدرس السادس

التحليل بالتقسيم

عند تحليل مقدار جبري مكون من أربعة حدود فإننا نستخدم في ذلك طريقة تسمى التحليل بالتقسيم وفيها يُقسم المقدار الجبري إما إلى مقدارين كل منهما مكون من حدين أومقدار ثلاثي وحد جبري .

أولاً : تقسيم المقدار الرباعى إلى مقدارين كل منهما مكون من حدين :

نقسم المقدار الرباعي إلى مقدارين كل منها مكون من حدين باستخدام خاصيتي الإبدال والدمج .
نحلل كل من هذين المقدارين عن طريق أحد الأنواع التحليل الآتية:
التحليل بإخراج (ع. م. أ)أ، تحليل الفرق بين مربعين أن تحليل مجموع أو الفرق بين مكعبين نستخرج (ع. م. أ) بين المقادير الناتجة من تحليل كل مقدار .

مثـــــال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① حـ^2 + حـ ء + ء هـ + حـ هـ
② ٧س − ٢٨ + أ س − ٤ أ
③ ٦ أ حـ − ٩ ب حـ − ٤ أ ء + ٦ ب ء
④ أ ب س^2 + ب س − أ س − ١

الحــــــل

① حـ^2 + حـ ء + ء هـ + حـ هـ
= (حـ^2 + حـ ء) + (ء هـ + حـ هـ)
= حـ (حـ + ء) + هـ (ء + حـ)
= (حـ + ء) (حـ + هـ)

② ٧س − ٢٨ + أ س − ٤ أ
= (٧س − ٢٨) + (أ س − ٤ أ)
= ٧ (س − ٤) + أ (س − ٤)
= (س − ٤) (٧ + أ)

③ ٦ أ حـ − ٩ ب حـ − ٤ أ ء + ٦ ب ء
= (٦ أ حـ − ٩ ب حـ) + (− ٤ أ ء + ٦ ب ء)
= ٣ حـ (٢ أ − ٣ ب) + ٢ ء (− ٢ أ + ٣ ب)
= ٣ حـ (٢ أ − ٣ ب) − ٢ ء (٢ أ − ٣ ب)
= (٢ أ − ٣ ب) (٣ حـ − ٢ ء)

④ أ ب س^2 + ب س − أ س − ١
= (أ ب س^2 − أ س) + (ب س − ١)
= أ س (ب س − ١) + (ب س − ١)
= (ب س − ١) (أ س + ١)

مثـــــال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① أ^3 + أ^2 − ٩ أ − ٩
② س^2 + ٣س + ٣ص − ص^2
③ أ^3 + ب^3 − أ − ب
④ س^2 ص^3 + ٨س^2 − ص^3 − ٨
⑤ ص^3 + ٦ص^2 + ١٢ص + ٨
⑥ س^3 − ٣س^2 + ٣س − ١

الحــــــل

① أ^{٣} + أ^{٢} − ٩أ − ٩

= (أ^{٣} + أ^{٢}) + (− ٩أ − ٩)

= أ^{٢} (أ + ١) − ٩ (أ + ١)

= (أ + ١) (أ^{٢} − ٩)

= (أ + ١) (أ − ٣) (أ + ٣)

③ أ^{٣} + ب^{٣} − أ − ب

= (أ^{٣} + ب^{٣}) + (− أ − ب)

= (أ + ب) (أ^{٢} − أ ب + ب^{٢}) − (أ + ب)

= (أ + ب) (أ^{٢} − أ ب + ب^{٢} − ١)

⑤ ص^{٣} + ٦ص^{٢} + ١٢ص + ٨

= (ص^{٣} + ٨) + (٦ص^{٢} + ١٢ص)

= (ص + ٢) (ص^{٢} − ٢ص + ٤) + ٦ص (ص + ٢)

= (ص + ٢) (ص^{٢} − ٢ص + ٤ + ٦ص)

= (ص + ٢) (ص^{٢} + ٤ص + ٤)

= (ص + ٢) (ص + ٢)^{٢}

= (ص + ٢)^{٣}

② س^{٢} + ٣س + ٣ص − ص^{٢}

= (س^{٢} − ص^{٢}) + (٣س + ٣ص)

= (س + ص) (س − ص) + ٣ (س + ص)

= (س + ص) (س − ص + ٣)

④ س^{٢} ص^{٣} + ٨س^{٢} − ص^{٣} − ٨

= (س^{٢} ص^{٣} − ص^{٣}) + (٨س^{٢} − ٨)

= ص^{٣} (س^{٢} − ١) + ٨ (س^{٢} − ١)

= (س^{٢} − ١) (ص^{٣} + ٨)

= (س^{٢} − ١) (ص + ٢) (ص^{٢} − ٢ص + ٤)

⑥ س^{٣} − ٣س^{٢} + ٣س − ١

= (س^{٣} − ١) + (− ٣س^{٢} + ٣س)

= (س − ١) (س^{٢} + س + ١) − ٣س (س − ١)

= (س − ١) (س^{٢} + س + ١ − ٣س)

= (س − ١) (س^{٢} − ٢س + ١)

= (س − ١) (س − ١)^{٢}

= (س − ١)^{٣}

ثانياً : تقسيم المقدار الرباعى إلى مقدار ثلاثى وحد جبرى :

نقسم المقدار الرباعي إلى مقدار ثلاثي مربع كامل ، والحد الرابع يكون مربعاً كاملاً بحيث يكون المقدار كله على صورة فرق بين مربعين . ويمكن التعرف على هذا النوع كما يلي :
ثلاثة حدود كل منها عبارة عن مربع كامل ، اثنان منها متحدان في الإشارة والثالث يختلف عنهما في الإشارة .الحد الرابع يكون مع الحدين المربعين المتحدي الإشارة مقداراً ثلاثياً مربعاً كاملاً.

مثـــــال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① س^{٢} + ٢٥ص^{٢} − ٣٦ − ١٠س ص

② ٩س^{٢} − ٤أ^{٢} + ص^{٢} + ٦س ص

الحـــــل

① س^{٢} + ٢٥ص^{٢} − ٣٦ − ١٠س ص

= (س^{٢} − ١٠س ص + ٢٥ص^{٢}) − ٣٦

= (س − ٥ص)^{٢} − ٣٦

= (س − ٥ص − ٦) (س − ٥ص + ٦)

② ٩س^{٢} − ٤أ^{٢} + ص^{٢} + ٦س ص

= (٩س^{٢} + ٦س ص + ص^{٢}) − ٤أ^{٢}

= (٣س + ٢ص)^{٢} − ٤أ^{٢}

= (٣س + ٢ص − ٢أ) (٣س + ٢ص + ٢أ)

تمارين على الدرس السادس

❶ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

(١) أ س + ب س + أ ص + ب ص

(٢) س ص + ٥ ص + ٧ س + ٣٥

(٣) ٥ ل − ١٠ م − أ ل + ٢ أ م

(٤) ٦ م^{٢} − ن + ٢ م − ٣ م ن

(٥) ٨ م ن − ٢ م^{٢} + ١٢ ن ل − ٣ م ل

(٦) ٣ أ س − أ − ٦ ب س + ٢ ب

(٧) ٢ س^{٢} ص − س ص^{٢} + ٢ أ س − أ ص

(٨) س^{٢} − ٢ س ع − ٢ س ص + ٤ ص ع

(٩) أ س − حـ ص − حـ س + أ ص

(١٠) ٥ ب + س أ + ٥ أ + س ب

(١١) س^{٣} + س^{٢} + ٩ س + ٩

(١٢) أ ب + ٦ م ن − ٢ ب م − ٣ أ ن

(١٣) س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٩ س − ٢٧

(١٤) ٢ أ^{٢} − ٢ ب + أ ب − ٤ أ

❷ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

(١) س^{٢} − ٥ س − ٤ ص^{٢} + ١٠ ص

(٢) س^{٢} − ص^{٢} + ٥ س − ٥ ص

(٣) أ^{٢} − ب^{٢} + أ + ب

(٤) س^{٢} − ص^{٢} + ٤ س + ٤ ص

(٥) أ^{٣} + ب^{٣} − أ − ب

(٦) س^{٢} − س^{٢} ص − ٤ ص^{٢} − ٢ س ص^{٢}

❸ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

(١) س^{٢} − ٦ س ص + ٩ ص^{٢} − ع^{٢}

(٢) س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ − ص^{٢}

(٣) س^{٢} + ٩ ص^{٢} − ٢٥ + ٦ س ص

(٤) س^{٢} + ٤ س ص − ٤٩ ع^{٢} + ٤ ص^{٢}

(٥) ١ − س^{٢} − ٤ س ص − ٤ ص^{٢}

(٦) ١٢١ س^{٤} − ١٠٠ س^{٢} − ٢٠ س − ١

(٧) ٦ س ص − س^{٢} − ٩ + ص^{٢}

(٨) ٤ م^{٤} − ٩ م^{٢} + ٦ م − ١

الدرس السابع

التحليل باكمال المربع

تذكر أن المقدار الثلاثي المربع الكامل يتميز بما يلي :

(١) الحد الأول : مربع كامل موجب.

(٢) الحد الثالث : مربع كامل موجب .

(٣) الحد الأوسط = ± $\sqrt{\text{الأول}}$ × $\sqrt{\text{الثاني}}$ × ٢

والذي يتم تحليل على الصورة :

($\sqrt{\text{الحد الأول}}$ $\boxed{\text{نفس إشارة الحد الأوسط}}$ $\sqrt{\text{الحد الثالث}}$)^{٢}

إلا أن هناك بعض المقادير ليست على صورة مربعات كاملة ، ولكن يمكن إكمالها لتصبح على الصورة : (مقدار ثلاثي مربع كامل) - (حد مربع كامل)

ثم يتم تحليلها كفرق بين مربعين .

خطوات تحليل المقدار بطريقة إكمال المربع

- **نضيف إلى المقدار ضعف حاصل ضرب الحدين المربعين ثم نطرحه حتى لا يتغير المقدار .**
- **باستخدام خواص الإبدال والدمج نعيد ترتيب حدود المقدار حتى نحصل على الصورة :**

(مقدار ثلاثي مربع كامل) - (حد مربع كامل)

- **نحلل المقدار الناتج على صورة فرق بين مربعين .**

مثال

حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① ٤ $س^{٤}$ + $ص^{٤}$	② $م^{٤}$ + ٢٥٠٠ $ب^{٤}$
③ ١٦ $س^{٤}$ - ٢٨ $س^{٢}$ $ص^{٢}$ + ٩ $ص^{٤}$	④ $م^{٤}$ - ١١ $م^{٢}$ $ن^{٢}$ + $ن^{٤}$

الحل

① ٤ $س^{٤}$ + $ص^{٤}$

= (٤ $س^{٤}$ + $ص^{٤}$) + ٤ $س^{٢}$ $ص^{٢}$ - ٤ $س^{٢}$ $ص^{٢}$

= (٤ $س^{٤}$ + ٤ $س^{٢}$ $ص^{٢}$ + $ص^{٤}$) - ٤ $س^{٢}$ $ص^{٢}$

= (٢ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ $)^{٢}$ - (٢ س ص $)^{٢}$

= (٢ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ - ٢ س ص) (٢ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٢ س ص)

② أ^{٤} + ٢٥٠٠ ب^{٤}

= (أ^{٤} + ٢٥٠٠ ب^{٤}) + ١٠٠ أ^{٢} ب^{٢} − ١٠٠ أ^{٢} ب^{٢}

= (أ^{٤} + ١٠٠ أ^{٢} ب^{٢} + ٢٥٠٠ ب^{٤}) − (١٠٠ أ^{٢} ب^{٢})

= (أ^{٢} + ٥٠ ب^{٢})^{٢} − (١٠ أ ب)^{٢}

= (أ^{٢} + ٥٠ ب^{٢} + ١٠ أ ب) (أ^{٢} + ٥٠ ب^{٢} − ١٠ أ ب)

③ ١٦ س^{٤} − ٢٨ س^{٢} ص^{٢} + ٩ ص^{٤}

= (١٦ س^{٤} + ٩ ص^{٤}) − ٢٨ س^{٢} ص^{٢}

= (١٦ س^{٤} + ٩ ص^{٤}) − ٢٨ س^{٢} ص^{٢} + ٢٤ س^{٢} ص^{٢} − ٢٤ س^{٢} ص^{٢}

= (١٦ س^{٤} − ٢٤ س^{٢} ص^{٢} + ٩ ص^{٢}) + ٢٤ س^{٢} ص^{٢} − ٢٨ س^{٢} ص^{٢}

= (٤ س^{٢} − ٣ ص^{٢})^{٢} − ٤ س^{٢} ص^{٢}

= (٤ س^{٢} − ٣ ص^{٢})^{٢} − (٢ س ص)^{٢}

= (٤ س^{٢} − ٣ ص^{٢} − ٢ س ص) (٤ س^{٢} − ٣ ص^{٢} − ٢ س ص)

④ م^{٤} − ١١ م^{٢} ن^{٢} + ن^{٤}

= (م^{٤} + ن^{٤}) − ١١ م^{٢} ن^{٢}

= (م^{٤} + ن^{٤}) − ١١ م^{٢} ن^{٢} + ٢ م^{٢} ن^{٢} − ٢ م^{٢} ن^{٢}

= (م^{٤} − ٢ م^{٢} ن^{٢} + ن^{٤}) − ١١ م^{٢} ن^{٢} + ٢ م^{٢} ن^{٢}

= (م^{٢} − ن^{٢})^{٢} − ٩ م^{٢} ن^{٢}

= (م^{٢} − ن^{٢})^{٢} − (٣ م ن)^{٢}

= (م^{٢} − ن^{٢} − ٣ م ن) (م^{٢} − ن^{٢} + ٣ م ن)

مثـــــال

① س^{٢} (س^{٢} − ١٩ ص^{٢}) + ٢٥ ص^{٤}

الحــــــــل

① س^{٢} (س^{٢} − ١٩ ص^{٢}) + ٢٥ ص^{٤}

= س^{٤} − ١٩ س^{٢} ص^{٢} + ٢٥ ص^{٤}

= (س^{٤} + ٢٥ ص^{٤}) − ١٩ س^{٢} ص^{٢}

= (س^{٤} − ١٠ س^{٢} ص^{٢} + ٢٥ ص^{٤}) − ١٩ س^{٢} ص^{٢} + ١٠ س^{٢} ص^{٢}

= (س^{٢} − ٥ ص^{٢})^{٢} − ٩ س^{٢} ص^{٢}

= (س^{٢} − ٥ ص^{٢} − ٣ س ص) (س^{٢} − ٥ ص^{٢} + ٣ س ص)

تمارين على الدرس السابع

❶ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $س^{٤} + ٤$

② $٤س^{٤} + ٦٢٥ص^{٤}$

③ $س^{٤} + ٤ص^{٤}$

④ $س^{٤} + ٦٤ص^{٤}$

⑤ $٦٤س^{٤} + ٨١ص^{٨}$

⑥ $٨١س^{٤} + ٤ص^{٤}$

⑦ $٦٤ب^{٤} + ١$

⑧ $٨س^{٤}ص^{٢} + ١٦٢ع^{٤}ص^{٢}$

❷ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $س^{٤} + ٩س^{٢} + ٨١$

② $س^{٤} - ٢٨س^{٢} + ١٦$

③ $٩س^{٤} + ٢س^{٢} + ١$

④ $٩س^{٤} - ٢٥س^{٢} + ١٦$

⑤ $س^{٤} + س^{٢}ص^{٢} + ٢٥ص^{٤}$

⑥ $س^{٤} + ٣س^{٢}ص^{٢} + ٤ص^{٤}$

⑦ $أ^{٤} + ٤أ^{٢}ب^{٢} + ١٦ب^{٤}$

⑧ $٤س^{٤} + ٢٥ص^{٤} - ٢٩س^{٢}ص^{٢}$

⑨ $س^{٤} - ١٩س^{٢}ص^{٢} + ٩ص^{٤}$

⑩ $٢٧س^{٤} - ٣٠س^{٢}ص^{٢} + ٣ص^{٤}$

⑪ $٣م^{٤} + ٣ن^{٤} - ٥٤م^{٢}ن^{٢}$

⑫ $٥٠س^{٤} + ١٨ص^{٤} - ٦٨س^{٢}ص^{٢}$

❸ حلل كلاً من المقادير الآتية تحليلاً تاماً:

① $س^{٢}(٩س^{٢} - ١٠ص^{٢}) + ص^{٤}$

② $٤س^{٢}(٤س^{٢} - ٧ص^{٢}) + ص^{٤}$

③ $٤أ^{٢}(٩أ^{٢} - ٦ب^{٢}) + ٩ب^{٤}$

④ $٤س^{٢}(س^{٢} + ٢ص^{٢}) + ٩ص^{٢}$

الدرس الثامن

حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً

معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد: هي معادلة تحتوي على مجهول واحد فقط أكبر أس لهذا المجهول هو(٢) لذا فإنها تُسمى معادلة من الدرجة الثانية أو معادلة تربيعية .ولحل هذه المعادلة يجب أن نتعرف على الحقيقة الرياضية الآتية :

حقيقة هامة :

إذا كان ٲ ، ب عددان حقيقيان وكان : ٲ × ب = ٠ فإن إما : ٲ = ٠ أ، ب = ٠

مثــــال

① $س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$
② $س^{٢} - س - ١٢ = ٠$
③ $س^{٢} + ٢س - ٢٤ = ٠$
④ $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$
⑤ $٢س^{٢} - ٥س + ٢ = ٠$
⑥ $٦س^{٢} - س - ٢ = ٠$
⑦ $٤س^{٢} - ٩ = ٠$
⑧ $س^{٢} - ٩ = ٠$
⑨ $س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$
⑩ $س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠$
⑪ $٢س^{٢} - ٥س = ٠$
⑫ $٣س^{٢} + ٧س = ٠$
⑬ $(س + ٥)^{٢} - ٩ = ٠$
⑭ $(س + ٤)(س - ٢) + ٥ = ٠$
⑮ $س(س - ٣) = ٥س$
⑯ $س^{٢} = ٢(٣س - ٤)$

الحـــل

① $\because س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

$\therefore (س - ٢)(س - ٣) = ٠$

$\therefore س - ٢ = ٠$ | $\therefore س - ٣ = ٠$

$\therefore س = ٢$ | $\therefore س = ٣$

$\therefore$ م.ح $= \{٢ ، ٣\}$

② $س^{٢} - س - ١٢ = ٠$

$\therefore (س + ٣)(س - ٤) = ٠$

$\therefore س + ٣ = ٠$ | $\therefore س - ٤ = ٠$

$\therefore س = -٣$ | $\therefore س = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{-٣ ، ٤\}$

③ $\because س^{٢} + ٢س - ٢٤ = ٠$

$\therefore (س + ٦)(س - ٤) = ٠$

$\therefore س + ٦ = ٠$ | $\therefore س - ٤ = ٠$

$\therefore س = -٦$ | $\therefore س = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{-٦ ، ٤\}$

④ $\because س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

$\therefore (س - ٣)(س - ٥) = ٠$

$\therefore س - ٣ = ٠$ | $\therefore س - ٥ = ٠$

$\therefore س = ٣$ | $\therefore س = ٥$

$\therefore$ م.ح $= \{٣ ، ٥\}$

⑤ ∵ ٢س^{٢} − ٥س + ٢ = ٠

∴ (٢س − ١)(س − ٢) = ٠

∴ ٢س − ١ = ٠ | ∴ س − ٢ = ٠

∴ ٢س = ١ | ∴ س = ٢

∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{١}{٢}$ ، ٢}

⑥ ∵ ٦س^{٢} − س − ٢ = ٠

∴ (٣س − ٢)(٢س + ١) = ٠

∴ ٣س − ٢ = ٠ | ∴ ٢س + ١ = ٠

∴ ٣س = ٢ | ∴ ٢س = −١

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ | ∴ س = −$\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{٢}{٣}$ ، −$\frac{١}{٢}$}

⑦ ∵ ٤س^{٢} − ٩ = ٠

∴ (٢س − ٣)(٢س + ٣) = ٠

∴ ٢س − ٣ = ٠ | ∴ ٢س + ٣ = ٠

∴ ٢س = ٣ | ∴ ٢س = −٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ | ∴ س = −$\frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{٣}{٢}$ ، −$\frac{٣}{٢}$}

⑧ ∵ س^{٢} − ٢٥ = ٠

∴ (س − ٥)(س + ٥) = ٠

∴ س − ٥ = ٠ | ∴ س + ٥ = ٠

∴ س = ٥ | ∴ س = −٥

∴ م.ح = {٥ ، −٥}

⑨ ∵ س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)^{٢} = ٠

∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

⑩ ∵ س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠

∴ (س + ٢)^{٢} = ٠

∴ س + ٢ = ٠

∴ س = −٢

∴ م.ح = {−٢}

⑪ ∵ ٢س^{٢} − ٥س = ٠

∴ س(٢س − ٥) = ٠

∴ س = ٠ | ∴ ٢س − ٥ = ٠

∴ ٢س = ٥

∴ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ م.ح = {٠ ، $\frac{٥}{٢}$}

⑫ ∵ ٣س^{٢} + ٧س = ٠

∴ س(٣س + ٧) = ٠

∴ س = ٠ | ∴ ٣س + ٧ = ٠

∴ ٣س = −٧

∴ س = −$\frac{٧}{٣}$

∴ م.ح = {٠ ، −$\frac{٧}{٣}$}

⑬ ∵ (س+٥)^{٢} − ٩ = ٠

∴ [(س+٥)−٣][(س+٥)+٣]=٠

∴ (س+٢)(س+٨)=٠

∴ س+٢=٠ | ∴ س+٨=٠

∴ س=−٢ | ∴ س=−٨

∴ م.ح={−٢،−٨}

⑭ ∵ (س+٤)(س−٢)+٥=٠

∴ س^{٢}+٢س−٨+٥=٠

∴ س^{٢}+٢س−٣=٠

∴ (س−١)(س+٣)=٠

∴ س−١=٠ | ∴ س+٣=٠

∴ س=١ | ∴ س=−٣

∴ م.ح={١،−٣}

⑮ ∵ س(س−٣)=٥س

∴ س^{٢}−٣س=٥س

∴ س^{٢}−٣س−٥س=٠

∴ س^{٢}−٨س=٠

∴ س(س−٨)=٠

∴ س=٠ | ∴ س−٨=٠

∴ س=٨

∴ م.ح={٠،٨}

⑯ ∵ س^{٢} = ٢(٣س−٤)

∴ س^{٢}=٦س−٨

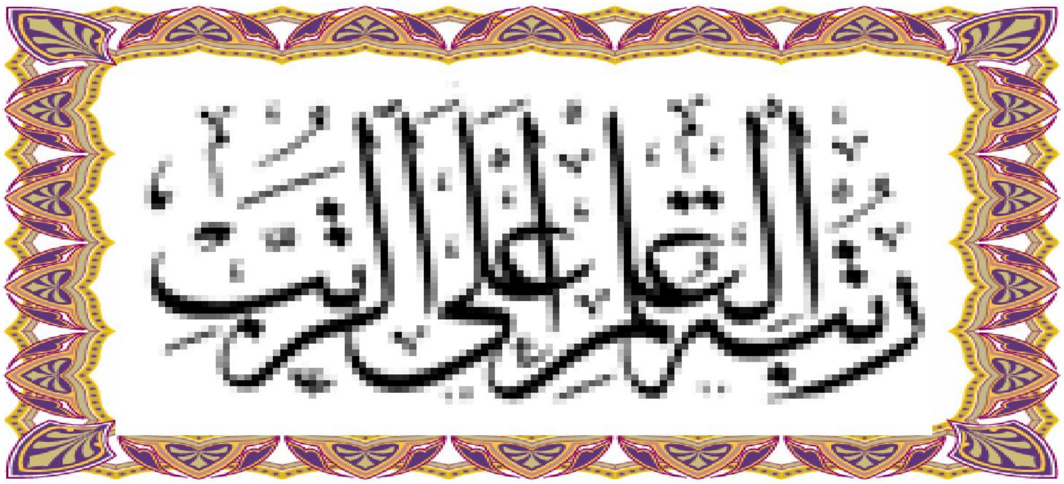
∴ س^{٢}−٦س+٨=٠

∴ (س−٢)(س−٤)=٠

∴ س−٢=٠ | ∴ س−٤=٠

∴ س=٢ | ∴ س=٤

∴ م.ح={٢،٤}



تمارين على الدرس الثامن

❶ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في ع :

① $س^{٢} - ٧س + ١٢ = ٠$
② $س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠$
③ $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$
④ $س^{٢} - س - ٢٠ = ٠$
⑤ $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$
⑥ $٣س^{٢} - ٧س + ٢ = ٠$
⑦ $٣س^{٢} - ١٣س + ١٢ = ٠$
⑧ $٦س^{٢} - ٧س - ٣ = ٠$
⑨ $س^{٢} - ١٠٠ = ٠$
⑩ $س^{٢} - ١ = ٠$
⑪ $٢٥س^{٢} = ٩$
⑫ $٩س^{٢} = ١٦$
⑬ $٤س^{٢} = ١$
⑭ $(س + ٣)^{٢} - ٤٩ = ٠$
⑮ $(٢س + ١)^{٢} - ٩ = ٠$
⑯ $س^{٢} = -٣س$
⑰ $س^{٢} = س$
⑱ $س^{٢} = ٢س$
⑲ $س^{٢} = -س$
⑳ $س^{٢} - ٢س + ١ = ٠$
㉑ $س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$
㉒ $س(س + ٣) = ١٠$
㉓ $(س - ٣)(س + ١) = ٥$
㉔ $(س + ٨)(س - ٣) = ٣س$
㉕ $(س - ١)^{٢} + س = ٣$
㉖ $(س + ٣)^{٢} + ٣(س + ٣) - ١٠ = ٠$
㉗ $(٢س + ١)^{٢} = (٣س - ١)^{٢}$
㉘ $٤س^{٣} = ٩س$
㉙ $س^{٤} + ٢٥ = ٢٦س^{٢}$
㉚ $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ = ٠$

❷ أكمل العبارات الآتية لتصبح صحيحة :

① **مجموعة حل المعادلة :** $س^{٢} + س = ٠$ **في ع هي** ....
② **مجموعة حل المعادلة :** $س(س + ٣) = ٠$ **في ع هي** ....
③ **مجموعة حل المعادلة :** $٢(س + ١) = ٠$ **في ع هي** ....
④ **مجموعة حل المعادلة :** $س^{٢} + س = ٠$ **في ع هي** ....
⑤ **مجموعة حل المعادلة :** $س^{٢} - ٤ = ٠$ **في ع هي** ....
⑥ **مجموعة حل المعادلة :** $س^{٢} + ٩ = ٠$ **في ع هي** ....
⑦ **مجموعة حل المعادلة :** $٣(س - ٢)(س + ٥) = ٠$ **في ع هي** ....
⑧ **إذا كان :** ٢ **هو أحد جذري المعادلة :** $س^{٢} + أس - ٨ = ٠$ **فإن :** $أ =$ ....
⑨ **إذا كان :** -٣ **هو أحد جذري المعادلة :** $س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$ **فإن : الجذر الآخر هو**..........
⑩ **إذا كان :** ١ **هو أحد جذري المعادلة :** $س^{٢} + ٣س + ك = ٠$ **فإن : الجذر الآخر هو**..........

الدرس التاسع

تطبيقات على حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً

خطوات حل المسائل اللفظية على معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً :

١) وضع الفروض من المعطيات المسألة وذلك بإعطاء المجهول أحد الرموز وليكن س .

٢) تكوين المعادلة من معطيات المسالة .

٣) حل المعادلة ـ كما تعلمنا في الدرس السابق ـ لإيجاد قيمة س .

٤) التعويض في الفروض لإيجاد المجهول في المسألة .

٥) اختبار صحة الحل من المسألة نفسها وليس من المعادلة .

للمساعد في ضع لفر ~

إذا كان عدد ما يساوي س فإن:

ضعف العدد = ٢ س ، ثلاثة أمثال العدد = ٣ س ، أربعة أمثال العدد = ٤ س ،....... وهكذا

وأيضاً : نصف العدد = $\frac{١}{٢}$ ، ثلث العدد = $\frac{١}{٣}$ ،........ وهكذا

إذا كان عدد ما يساوي س فإن :

معكوسة الجمعي = - س ، معكوسه الضربي = $\frac{١}{س}$

إذا كان عدد ما يساوي س فإن :

العدد الذي يزيد عنه بمقدار ٧ هو (س + ٧) ،العدد الذي يقل (ينقُص) عنه بمقدار ٣ هو (س - ٣)

إذا كان عمر شهد الأن هو س سنةفإن :

عمرها منذ ٣ سنوات هو (س - ٣) سنة

إذا كان عمر محمد الأن هو س سنة فإن :

عمره بعد ٥ سنوات هو (س + ٥)سنة

عددان متتاليان فإن :

العدد الأول = س ، العدد الثاني = س+ ١

عددان فرديان أو زوجيان متتاليان فإن :

العدد الأول = س ، العدد الثاني = س+ ٢

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المربع = $(\text{طول الضلع})^{٢}$

الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسيهما = ١٨٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

مثـــال

أوجد العدد الذي يزيد مربعه عن ضعفه بمقدار ١٥

الحـــل

نفرض أن العدد = س

∴ **ضعفه** = ٢س

، **مربعه** = $س^٢$

∵ $س^٢ - ٢س = ١٥$

∴ $س^٢ - ٢س - ١٥ = ٠$

∴ (س + ٣)(س − ٥) = ٠

∴ س + ٣ = ٠ ∴ س = − ٣

∴ س − ٥ = ٠ ∴ س = ٥

∴ **العدد** = − ٣ أ، ٥

مثـــال

عدد حقيقي إذا أضيف إلى مربعه كان الناتج ١٢ فما العدد ؟

الحـــل

نفرض أن العدد = س

∴ **مربعه** = $س^٢$

∵ $س^٢ + س = ١٢$

∴ $س^٢ + س - ١٢ = ٠$

∴ (س + ٤)(س − ٣) = ٠

∴ س + ٤ = ٠ ∴ س = − ٤

∴ س − ٣ = ٠ ∴ س = ٣

∴ **العدد** = − ٤ أ، ٣

مثـــال

عـددان حقيقيـان يزيـد أحـدهما عـن الآخـر بقـدار ٤ ، فـإذا كـان حاصـل ضـرب العـددين يساوي ٤٥ فما العددان ؟

الحـــل

نفرض أن العدد الأصغر = س

∴ **العدد الأكبر** = س + ٤

∵ س (س + ٤) = ٤٥

∴ $س^٢ + ٤س - ٤٥ = ٠$

∴ (س − ٥)(س + ٩) = ٠

∴ س − ٥ = ٠

∴ س = ٥

∴ **العدد الأصغر** = ٥

∴ **العدد الأكبر** = ٩

∴ س + ٩ = ٠

∴ س = − ٩

∴ **العدد الأصغر** = − ٩

∴ **العدد الأكبر** = − ٥

مثـــال

عددان فرديان متتاليان موجبان مجموع مربعيهما ٧٤ أوجد العددين .

الحـــل

نفرض أن العدد الأول = س

∴ العدد الثاني = س + ٢

∵ س^٢^ + (س + ٢)^٢^ = ٧٤

∴ س^٢^ + س^٢^ + ٤ س + ٤ - ٧٤ = ٠

∴ ٢ س^٢^ + ٤ س - ٧٠ = ٠ (بالقسمة على ٢)

∴ س^٢^ + ٢ س - ٣٥ = ٠

∴ (س + ٧) (س - ٥) = ٠

∴ (س + ٧) (س - ٥) = ٠

∴ س + ٧ = ٠ ∴ س = - ٧ مرفوض

∴ س - ٥ = ٠ ∴ س = ٥

∴ العدد الأول = ٥

، العدد الثاني = ٥ + ٢ = ٧

مثـــال

عدد حقيقي يزيد عن معكوسه الضربي بمقدار $\frac{٥}{٦}$ فما العدد ؟

الحـــل

نفرض أن العدد = س

∴ معكوسه الضربي = $\frac{١}{س}$

∵ س - $\frac{١}{س}$ = $\frac{٥}{٦}$ (بالضرب في ٦ س)

∴ ٦ س^٢^ - ٦ = ٥ س

∴ ٦ س^٢^ - ٥ س - ٦ = ٠

∴ (٢ س - ٣) (٣ س + ٢) = ٠

∴ (س + ٤) (٣ س + ٢) = ٠

∴ ٢ س - ٣ = ٠ ∴ ٢ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

∴ ٣ س + ٢ = ٠ ∴ ٣ س = - ٢ ∴ س = - $\frac{٢}{٣}$

∴ العدد = $\frac{٣}{٢}$ أ، - $\frac{٢}{٣}$

مثـــال

إذا كان عمر حاتم الآن يزيد عن عمر حنان بمقدار ٤ سنوات ، ومجموع مربعي عمريهما الآن يساوي ٢٦ ، فما عمر كل منهما الآن ؟

الحـــل

نفرض أن عمر حنان الآن = س

∴ عمر حاتم الآن = س + ٤

∵ مربع عمر حنان = س^٢^

∴ مربع عمر حاتم = (س + ٤)^٢^

∴ س^٢^ + (س + ٤)^٢^ = ٢٦

∴ س^٢^ + س^٢^ + ٨ س + ١٦ - ٢٦ = ٠

∴ ٢ س^٢^ + ٨ س - ١٠ = ٠ (بالقسمة على ٢)

∴ س^٢^ + ٤ س - ٥ = ٠

∴ (س - ١) (س + ٥) = ٠

∴ س - ١ = ٠ ∴ س = ١

∴ س + ٥ = ٠ ∴ س = - ٥ مرفوض؟؟؟

∴ عمر حنان = ١ سنة

، عمر حاتم = ٥ سنة

مثـــال

مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كانت مساحته ٢١ سم^{٢} . أوجد بعديه

الحـــل

نفرض أن عرض المستطيل = س

∴ **طول المستطيل** = س + ٤

∵ **مساحة المستطيل = الطول × العرض**

∴ **مساحة المستطيل** = س (س + ٤)

∴ **مساحة المستطيل** = ٢١

∴ س (س + ٤) = ٢١

∴ س^{٢} + ٤س − ٢١ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٧) = ٠

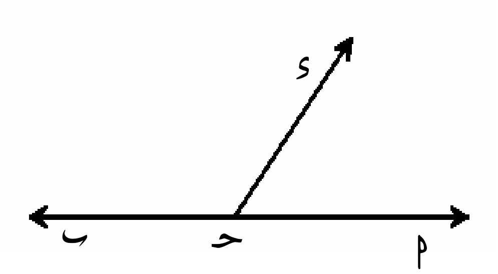
∴ س − ٣ = ٠ ، ∴ س + ٧ = ٠

∴ س = ٣ ، ∴ س = − ٧ **مرفوض؟؟؟**

∴ **عرض المستطيل** = ٣ سم

، **طول المستطيل** = ٧ سم

مثـــال



في الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{حء}} \cap \overleftrightarrow{\text{أب}}$ = { ح }

فإذا كان: ق (∠ ب ح ء) = (س^{٢})°

، ق (∠ أ ح ء) = (٨س)°

أوجد قيمة : س

الحـــل

∵ $\overrightarrow{\text{حء}} \cap \overleftrightarrow{\text{أب}}$ = { ح }

∴ ق (∠ ب ح ء) + ق (∠ أ ح ء) = ١٨٠°

∴ س^{٢} + ٨س = ١٨٠

∴ س^{٢} + ٨س − ١٨٠ = ٠

∴ (س − ١٠) (س + ١٨) = ٠

∴ س − ١٠ = ٠ ، ∴ س + ١٨ = ٠

∴ س = ١٠ ، ∴ س = − ١٨ **مرفوض؟؟؟**

مثـــال

أ ب ح **مثلث فيه** : ق (∠ أ) = (س^{٢} + ٦١)° ، ق (∠ ب) = (١١٠ − ١١ س)°

، ق (∠ ح) = (٩٠ − ٧س)° **أوجد قيمة** س **وقياسات زوايا المثلث .**

الحـــل

في المثلث أ ب ح :

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ ح) = ١٨٠°

∴ س^{٢} + ٦١ + ١١٠ − ١١س + ٩٠ − ٧س = ١٨٠

∴ س^{٢} − ١٨س + ٨١ = ٠

∴ (س − ٩)^{٢} = ٠

∴ س − ٩ = ٠

∴ س = ٩

∴ ق (∠ أ) = ١٤٢°

∴ ق (∠ ب) = ١١°

∴ ق (∠ ح) = ٢٧°

تمارين على الدرس التاسع

❶ عدد صحيح موجب يزيد مربعه عن أربعة أمثاله بمقدار ٢١ أوجد هذا العدد.

❷ عدد صحيح موجب أذا أضيف مربعه إلى ثلاثة أمثاله كان الناتج يساوى ١٠ أوجد هذا العدد.

❸ عدد صحيح موجب مربعه يزيد عنه بمقدار ٢٠ أوجد هذا العدد.

❹ عدد صحيح موجب مربعه يساوى ثلاثة أمثاله فما هو هذا العدد.

❺ أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف أربعة أمثاله إلى مربعه كان الناتج ٥

❻ أوجد العدد الذي إذا أضيف معكوسه الجمعي إلى مربعه كان الناتج ٣٠ .

❼ عددان زوجيان متتاليان مجموع مربعيهما ٥٢ أوجد العددين.

❽ عددان فرديان موجبان متتاليان مجموع مربعيهما ١٣٠ فما العددان ؟

❾ عددان متتاليان مجموع مربعيهما ٨٥ فما العددان ؟

❿ عددان الفرق بينهما ٣ ومجموع مربعيهما ٢٩ أوجد العددين.

⓫ عددان موجبان النسبة بينهما ٢ : ٣ وحاصل ضربهما يزيد عن ضعف أكبرهما بمقدار ١٢ أوجد العددين .

⓬ إذا كان عمر شهد الآن يزيد عن عمر محمد بمقدار ٣ سنوات ، ومجموع مرعي عمريهما الآن يساوي ١٤٩ . أوجد عمر كل منهما الآن.

⓭ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ، فإذا كانت مساحته ٢٨ سم^{٢} أوجد بعديه.

⓮ مربع طول ضلعه س سم ، مستطيل بعداه ٢ سم ، س سم فإذا كان مجموع مساحتيهما يساوي ١٥ سم^{٢} أوجد محيط المربع .

الدرس الأول

القوى الصحيحة غير السالبة في ح

إذا كان : أ عدداً حقيقياً ، م عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$أ^{م} = أ \times أ \times أ \times أ \times .... \times أ$ **(م من المرات)**

فمثلاً : $(\sqrt{٢})^{٣} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = (\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}) \times \sqrt{٢} = ٢ \times \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$

وأيضاً : $(-\sqrt{٣})^{٤} = -\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣}$

$= (-\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣}) \times (-\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣}) = ٣ \times ٣ = ٩$

ملاحظات

❶ **إذا كان : أ عدداً حقيقياً $\neq$ صفر فإن :** $(أ)^{صفر} = ١$

فمثلاً : $(\sqrt{٧})^{صفر} = ١$ ، ، ، $(-\sqrt{٣})^{صفر} = ١$

لاحظ أن : $(صفر)^{صفر}$ **(كمية غير معينة)**

❷ **إذا كان : أ عدداً حقيقياً ، م عدداً صحيحاً موجباً فإن :**

✸ $(-أ)^{م} = (أ)^{م}$ **حيث م عدد زوجي**

فمثلاً : $(-\sqrt{٥})^{٢} = (\sqrt{٥})^{٢} = ٥$

✸ $(-أ)^{م} = -(أ)^{م}$ **حيث م عدد فردي**

فمثلاً : $(-\sqrt{٧})^{٣} = -(\sqrt{٧})^{٣} = -٧\sqrt{٧}$

تذكر أن $(\sqrt{أ})^{ن} = (أ)^{\frac{ن}{٢}}$: أ $\geq$ صفر

قوانين الأسس الصحيحة غير السالبة

❶ القانون الأول :

إذا كان : أ عدداً حقيقياً ، م ، ن عددان صحيحان غير سالبين فإن :

$$(أ)^{م} \times (أ)^{ن} = (أ)^{م+ن}$$

فمثلاً : $(\sqrt{٢})^{٣} \times (\sqrt{٢})^{٥} = (\sqrt{٢})^{٣+٥} = (\sqrt{٢})^{٨} = (٢)^{٤} = ١٦$

،، $(\sqrt{٣})^{٢} \times (\sqrt{٣})^{٣} \times (\sqrt{٣})^{٥} = (\sqrt{٣})^{٢+٣+٥} = (\sqrt{٣})^{١٠} = (٣)^{٥} = ٢٤٣$

---

❷ القانون الثاني :

إذا كان : أ عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر ، م ، ن عددان صحيحان غير سالبين حيث م ≥ ن فإن :

$$(أ)^{م} \div (أ)^{ن} = (أ)^{م-ن}$$

فمثلاً : $(\sqrt{٧})^{٧} \div (\sqrt{٧})^{٤} = (\sqrt{٧})^{٧-٣} = (\sqrt{٧})^{٣} = ٧\sqrt{٧}$

،، $(\sqrt{٦})^{٦} \div (\sqrt{٦})^{٢} = (\sqrt{٦})^{٦-٢} = (\sqrt{٦})^{٤} = (٦)^{٢} = ٣٦$

---

❸ القانون الثالث :

إذا كان : أ ، ب عددان حقيقيان ، م عدداً صحيحاً غير سالب فإن:

$$(أ \times ب)^{م} = (أ)^{م} \times (ب)^{م}$$

فمثلاً : $(\sqrt{٢} \times \sqrt{٥})^{٤} = (\sqrt{٢})^{٤} \times (\sqrt{٥})^{٤} = ٤ \times ٢٥ = ١٠٠$

،، $(٢\sqrt{٢} \times \sqrt{٣})^{٣} = (٢)^{٣} \times (\sqrt{٢})^{٣} \times (\sqrt{٣})^{٣} = ٨ \times ٢\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٣} = ٤٨\sqrt{٦}$

---

❹ القانون الرابع :

إذا كان : أ ، ب عددان حقيقيان ، ب ≠ ٠ ، م عدداً صحيحاً غير سالب فإن:

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$$

فمثلاً : $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}}\right)^{٢} = \frac{(\sqrt{٢})^{٢}}{(\sqrt{٥})^{٢}} = \frac{٢}{٥}$

،، $\left(\frac{٢\sqrt{٥}}{٥\sqrt{٢}}\right)^{٤} = \frac{(٢)^{٤} \times (\sqrt{٥})^{٤}}{(٥)^{٤} \times (\sqrt{٢})^{٤}} = \frac{(٢)^{٤} \times (٥)^{٢}}{(٥)^{٤} \times (٢)^{٢}} = \frac{٤}{٢٥}$

❺ القانون الخامس :

إذا كان : أ عدداً حقيقيا ، م ، ن عددان صحيحان غير سالبين فإن:

$$[(\text{أ})^{\text{م}}]^{\text{ن}} = (\text{أ})^{\text{م} \times \text{ن}}$$

فمثلاً : $[(\sqrt{2})^{2}]^{3} = (\sqrt{2})^{2\times 3} = (\sqrt{2})^{6} = (2)^{3} = 8$

لاحظ أن: $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = (\text{أ}^{\text{ن}})^{\text{م}} = (\text{أ})^{\text{م} \times \text{ن}}$

فمثلاً: $(2^{3})^{5} = (2^{5})^{3} = (2)^{15}$

مثـــــال

أوجد قيمة كل مما يأتي مع وضع الناتج في أبسط صورة :

① $(\sqrt{2})^{2} \times (\sqrt{2})^{4}$

② $(-\sqrt{5})^{9} \div (-\sqrt{5})^{5}$

③ $[(\sqrt{2})^{3} \times (-\sqrt{2})^{2}]^{2}$

④ $\dfrac{(\sqrt{3})^{4} \times (\sqrt{3})^{2}}{(\sqrt{3})^{5}}$

⑤ $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^{4}$

⑥ $\dfrac{(5\sqrt{3})^{3} \times (-2\sqrt{2})^{2}}{(5\sqrt{2})^{2} \times (2\sqrt{3})^{2}}$

الحـــل

① $(\sqrt{2})^{2} \times (\sqrt{2})^{4}$

$= (\sqrt{2})^{2+4} = (\sqrt{2})^{6}$

$= (2)^{3} = 8$

② $(-\sqrt{5})^{9} \div (-\sqrt{5})^{5}$

$= (-\sqrt{5})^{9-5} = (-\sqrt{5})^{4}$

$= (\sqrt{5})^{4} = (5)^{2} = 25$

③ $[(\sqrt{2})^{3} \times (-\sqrt{2})^{2}]^{2}$

$= [(\sqrt{2})^{3} \times (\sqrt{2})^{2}]^{2}$

$= [(\sqrt{2})^{5}]^{2} = (\sqrt{2})^{10}$

$= (2)^{5} = 32$

④ $\dfrac{(\sqrt{3})^{4} \times (\sqrt{3})^{2}}{(\sqrt{3})^{5}}$

$= \dfrac{(\sqrt{3})^{6}}{(\sqrt{3})^{5}}$

$= \sqrt{3}$

⑤ $\left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٣\sqrt{٢}}\right)^{٤}$

$= \frac{(٢)^{٤} \times (\sqrt{٣})^{٤}}{(٣)^{٤} \times (\sqrt{٢})^{٤}}$

$= \frac{(٢)^{٤} \times (٣)^{٢}}{(٣)^{٤} \times (٢)^{٢}} = \frac{٤}{٩}$

⑥ $\frac{(٥\sqrt{٣})^{٣} \times (-٢\sqrt{٢})^{٢}}{(٥\sqrt{٢})^{٢} \times (٢\sqrt{٣})^{٢}}$

$= \frac{(٥)^{٣} \times (\sqrt{٣})^{٣} \times (-٢)^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢}}{(٥)^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢} \times (٢)^{٢} \times (\sqrt{٣})^{٢}}$

$= ٥\sqrt{٣}$

مثـــال

إذا كان : $س = ٢\sqrt{٢}$ ، $ص = ٣$ **فأوجد قيمة المقدار :** $(س^{٢} - ص^{٢})^{٣}$

الحـــل

$\because$ $س^{٢} = (٢\sqrt{٢})^{٢} = ٨$ ، $ص^{٢} = (٣)^{٢} = ٩$

$\therefore$ $(س^{٢} - ص^{٢})^{٣} = [٨ - ٩]^{٣} = (-١)^{٣} = -١$

مثـــال

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

① **قيمة المقدار العدد :** $(٢)^{٥} + (\sqrt{٢})^{١٠} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $(٢)^{٦}$ (ب) $(٢)^{١٠}$ (حـ) $(\sqrt{٢})^{١٥}$ (ء) $(\sqrt{٢})^{٢٠}$

② **قيمة المقدار :** $(٢)^{٢٠} + (٢)^{٢١} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٢×٢^{٤٠} (ب) ٢×٢^{٤١} (حـ) ٣×٢^{٢٠} (ء) ٣×٢^{٢١}

③ **سدس العدد:** $(٢)^{١٢} \times (٣)^{١٢} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $٦^{٢}$ (ب) $٦^{٤}$ (حـ) $٦^{١١}$ (ء) $٦^{٢٣}$

④ **قيمة المقدار :** $(٣)^{صفر} + \left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{-٢٧}}$

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (حـ) ١ (ء) ٣

⑤ $٤^{٣} + ٤^{٣} + ٤^{٣} + ٤^{٣} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $٤^{٣}$ (ب) $٤^{٤}$ (حـ) $٤^{١٢}$ (ء) $٤^{٨١}$

⑥ **إذا كانت :** $(س - ٥)^{صفر} = ١$ **فإن :** س ∈ ....

(أ) ح − {٥}　　(ب) ح − {−٥}　　(ج) {٥}　　(د) ح

⑦ $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٩} (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٩} =$ ....

(أ) ١　　(ب) $\sqrt{٥}$　　(ج) $\sqrt{٦}$　　(د) ٥

⑧ **أربعة أمثال العدد :** $(٢)^{٨}$ **هو** ....

(أ) $(٢)^{٣٢}$　　(ب) $(٤)^{٨}$　　(ج) $(٨)^{٨}$　　(د) $(٢)^{١٠}$

⑨ **إذا كان :** $(٣)^{س} = ٥$ ، $\frac{١}{(٣)^{ص}} = ٧$ **فإن :** $(٣)^{س + ص} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٧}$　　(ب) $\frac{٧}{٥}$　　(ج) ٢　　(د) ١٢

⑩ **إذا كان :** $س = (\sqrt{٣} - ٢)^{٥}$ ، $ص = (\sqrt{٣} + ٢)^{٥}$ **فإن:** س ص = ...

(أ) ١　　(ب) − ١　　(ج) ٧　　(د) − ٧

تمارين على الدرس الأول

❶ أكمل العبارات الآتية:

① نصف العدد $(٢)^{١٠}$ = ...

② ربع العدد $(٢)^{١٢}$ = ...

③ سدس العدد $(٣)^{١٠} \times (٢)^{١٠}$ = ...

④ إذا كان : $(ك + ٣)^{صفر} = ١$ فإن : ك ∈ ....

⑤ $٤^{٦} + ٤^{٦} + ٤^{٦} + ٤^{٦}$ = ...

⑥ $(٧ أ)^{صفر}$ = ... أما : $٧ (أ)^{صفر}$ = ...

⑦ إذا كان : $٥^{س} = ٧$ ، $٥^{ص} = ٤$ فإن : $(٥)^{س + ص}$ = ...، $(٥)^{س - ص}$ = ...

⑧ إذا كان : $٣^{س} = ٢$ فإن : $(٣)^{٢س}$ = ... ، $(٣)^{٣س}$ = ...

⑨ إذا كان : $٣^{ص} = ٥$ فإن : $(٢٧)^{ص}$ = ...

⑩ إذا كان : $(٧)^{س} = ٤$ فإن : $(٧)^{س+١}$ = ...

⑪ إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س+١}$ = ...

⑫ إذا كان : $٣^{س} = ٢$ فإن : $٩^{س+١}$ = ...

⑬ ثُـمن العدد $(٢)^{٩} \times (٤)^{٩}$ = ...

⑭ إذا كان : $س^{٥} \times س^{م} = س^{٩}$ فإن : م = ...

❷ أوجد قيمة كل مما يأتي مع وضع الناتج في أبسط صورة:

① $(\sqrt{٢}) \times (\sqrt{٢})^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٣}$

② $[(-\sqrt{٣})^{٢} \times (\sqrt{٣})^{٣}]^{٢}$

③ $\frac{(\sqrt{٢})^{٧} \times (\sqrt{٢})^{٨}}{(\sqrt{٢})^{٦}}$

④ $\frac{(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣}}{(\sqrt{٣})^{٤}}$

⑤ $\frac{(٣\sqrt{٢})^{٤} \times (\sqrt{٢})^{٢}}{(٢\sqrt{٣})^{٢}}$

⑥ $\frac{(\sqrt{٢})^{٢} \times (-٣\sqrt{٢})^{٣} \times (-\sqrt{٢})^{٥}}{(٢\sqrt{٣})^{٤}}$

الدرس الثاني

القوى الصحيحة السالبة في ع

إذا كان: ا عدداً حقيقياً ، م عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$ا^{-م} = \frac{1}{ا^{م}} \quad ، \quad ا^{م} = \frac{1}{ا^{-م}}$$

فمثلاً : $(2)^{-3} = \frac{1}{(2)^{3}} = \frac{1}{8}$ ، $(\sqrt{7})^{-4} = \frac{1}{(\sqrt{7})^{4}} = \frac{1}{49}$

وأيضاً : $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ ، $0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{(10)^{2}} = 10^{-2}$

ملاحظة هامة جداً جداً......

إذا كان : ا ، ب $\in$ ع* ، م $\in$ ص **فإن :** $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{ب}{ا}\right)^{م}$

فمثلاً : $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{25}{9}$

مثـــــال

أوجد قيمة ما يأتي في أبسط صورة :

① $(5)^{-2}$

② $(0{,}1)^{-2}$

③ $(\sqrt[3]{5})^{-3}$

④ $(-\sqrt{3})^{-2}$

⑤ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

⑥ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

⑦ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6}$

⑧ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}$

دقات قلب المرء قائلة له إن الحياة دقائق وثواني.

الحل

① $(٥)^{-٢} = (\frac{١}{٥})^{٢} = \frac{١}{٢٥}$

② $(٠,١)^{-٢} = (\frac{١}{١٠})^{-٢} = (١٠)^{٢} = ١٠٠$

③ $(\sqrt[٣]{٥})^{-٣} = (\frac{١}{\sqrt[٣]{٥}})^{٣} = \frac{١}{٥}$

④ $(-\sqrt{٣})^{-٢} = (-\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢} = \frac{١}{٣}$

⑤ $(\frac{٢}{٥})^{-٢} = (\frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$

⑥ $(\frac{١}{٢})^{-٣} = (٢)^{٣} = ٨$

⑦ $(-\frac{١}{\sqrt{٣}})^{-٦} = (-\sqrt{٣})^{٦} = (٣)^{٣} = ٢٧$

⑧ $(-\frac{\sqrt{٢}}{٢})^{-٤} = (-\frac{٢}{\sqrt{٢}})^{٤} = (\sqrt{٢})^{٤} = ٤$

ملاحظات هامة

❶ $\frac{أ^{-ن}}{ب^{-م}} = \frac{ب^{م}}{أ^{ن}}$ حيث أ ، ب $\neq ٠$

فمثلاً : $\frac{٢^{-٣}}{٥^{-٢}} = \frac{٢٥}{٣٢} = \frac{٢٥}{٨}$ ، $\frac{س^{-٣} ص^{-٥}}{ع^{-٤} ل^{-٧}} = \frac{ع^{٤} ل^{٧}}{س^{٣} ص^{٥}}$

❷ **جميع القوانين التي درسناها في الأسس الصحيحة غير السالبة صحيحة أيضا في الأسس الصحيحة السالبة .**

مثال

اوجد قيمة ما يأتي في أبسط صورة حيث س $\neq$ صفر

① $\frac{٢^{-١} \times ٤}{٣^{-١}}$

② $س^{٣} \times س^{-٢} \times س^{-١}$

③ $\frac{(س^{٢})^{-٣} \times (س^{-١})^{٢}}{س^{-٣} \times س^{-٤}}$

④ $\frac{(\sqrt{٢})^{٣} \times (\sqrt{٢})^{٥} \times (\sqrt{٢})^{-٢}}{(\sqrt{٢})^{٦} \times (\sqrt{٢})^{-٤}}$

الحل

① $\frac{٢^{-١} \times ٤}{٣^{-١}}$

$= \frac{٤ \times ٣}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$

② $س^{٣} \times س^{-٢} \times س^{-١}$

$= س^{٣} \times \frac{١}{س^{٢}} \times \frac{١}{س}$

$= ١$

③ $$\frac{(\text{س}^{٢})^{-٣} \times (\text{س}^{-١})^{٢}}{\text{س}^{-٣} \times \text{س}^{-٤}}$$

$$= \frac{\text{س}^{-٦} \times \text{س}^{-٢}}{\text{س}^{-٣} \times \text{س}^{-٤}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣} \times \text{س}^{٤}}{\text{س}^{٦} \times \text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٧}}{\text{س}^{٨}} = \text{س}^{-١}$$

$$= \frac{١}{\text{س}}$$

④ $$\frac{(\sqrt{٢})^{٣} \times (\sqrt{٢})^{٥} \times (\sqrt{٢})^{-٢}}{(\sqrt{٢})^{٦} \times (\sqrt{٢})^{-٤}}$$

$$= \frac{(\sqrt{٢})^{٣} \times (\sqrt{٢})^{٥} \times (\sqrt{٢})^{٤}}{(\sqrt{٢})^{٦} \times (\sqrt{٢})^{٢}}$$

$$= \frac{(\sqrt{٢})^{١٢}}{(\sqrt{٢})^{٨}} = (\sqrt{٢})^{٤}$$

$$= (٢)^{٢}$$

$$= ٤$$

مثــــال

اختصر كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

① $$\frac{(٩)^{\text{س}+١} \times (٤)^{\text{س}}}{(٣٦)^{\text{س}}}$$

② $$\frac{(١٠)^{\text{س}} \times ٢^{٢\text{س}+١}}{٨^{\text{س}} \times ٥^{\text{س}+١}}$$

③ $$\frac{٨^{\text{ن}-١} \times (٣٢)^{-\text{ن}}}{(٣٢) \times ٤^{-\text{ن}}}$$

④ $$\frac{(٢٧)^{\text{س}-١} \times ٨^{\text{س}}}{(٢\sqrt{٢})^{٢\text{س}} \times (٣\sqrt{٣})^{٢\text{س}}}$$

الحــــل

① $$\frac{(٩)^{\text{س}+١} \times (٤)^{\text{س}}}{(٣٦)^{\text{س}}}$$

$$= \frac{(٣^{٢})^{\text{س}+١} \times (٢^{٢})^{\text{س}}}{(٢^{٢})^{\text{س}} \times (٣^{٢})^{\text{س}}}$$

$$= \frac{(٣)^{٢\text{س}+٢} \times (٢)^{٢\text{س}}}{(٢)^{٢\text{س}} \times (٣)^{٢\text{س}}}$$

$$= (٣)^{٢\text{س}+٢-٢\text{س}} \times (٢)^{٢\text{س}-٢\text{س}}$$

$$= (٣)^{٢} \times (٢)^{\text{صفر}}$$

$$= ٩ \times ١ = ٩$$

٤	٢
٢	٢
١	
$٤ = (٢)^{٢}$	

٣٦	٢
١٨	٢
٩	٣
٣	٣
١	
$٣٦ = (٢)^{٢} \times (٣)^{٢}$	

٩	٣
٣	٣
١	
$٩ = (٣)^{٢}$	

② $\frac{(١٠)^{س} \times ٢^{٢س+١}}{٨^{س} \times ٥^{س+١}}$

$= \frac{(٢\times٥)^{س} \times (٢)^{٢س+١}}{(٢^{٣})^{س} \times (٥)^{س-١}}$

$= \frac{(٢)^{س} \times (٥)^{س} \times (٢)^{٢س+١}}{(٢)^{٣س} \times (٥)^{س-١}}$

$= (٢)^{س+٢س+١-٣س} \times (٥)^{س-س-١}$

$= (٢)^{١} \times (٥)^{-١} = ٢ \times \frac{١}{٥} = \frac{٢}{٥}$

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	
$٩ = (٣)^{٢}$	

١٠	٢
٥	٥
١	
$١٠ = ٢ \times ٥$	

---

③ $\frac{٨^{ن-١} \times (٣٢)^{-ن}}{(٣٢) \times ٤^{-ن}}$

$= \frac{(٢^{٣})^{ن-١} \times (٢^{٥})^{-ن}}{(٢)^{٥} \times (٢^{٢})^{-ن}}$

$= \frac{(٢)^{٣ن-٣} \times (٢)^{-٥ن}}{(٢)^{٥} \times (٢)^{-٢ن}}$

$= (٢)^{٣ن-٣-٥ن-٥+٢ن}$

$= (٢)^{-٨} = \frac{١}{(٢)^{٨}} = \frac{١}{٢٥٦}$

٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	
$٣٢ = (٢)^{٥}$	

---

④ $\frac{(٢٧)^{س-١} \times ٨^{س}}{(٢\sqrt{٢})^{٢س} \times (٣\sqrt{٣})^{٢س}}$

$= \frac{(٣^{٣})^{س-١} \times (٢^{٣})^{س}}{(٢)^{٢س} \times (\sqrt{٢})^{٢س} \times (٣)^{٢س} \times (\sqrt{٣})^{٢س}}$

$= \frac{(٣)^{٣س-٣} \times (٢)^{٣س}}{(٢)^{٢س} \times (٢)^{س} \times (٣)^{٢س} \times (٣)^{س}}$

$= (٣)^{٣س-٣-٢س-س} \times (٢)^{٣س-٢س-س}$

$= (٣)^{-٣} \times (٢)^{صفر}$

$= \frac{١}{٢٧} \times ١ = \frac{١}{٢٧}$

لاحظ أن :

(١) $(\sqrt{٢})^{٢س} = (٢)^{س}$

(٢) $(\sqrt{٣})^{٢س} = (٣)^{س}$

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	
$٩ = (٣)^{٢}$	

٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	
$٢٧ = (٣)^{٣}$	

تمارين على الدرس الثاني

❶ اوجد قيمة ما يأتي في أبسط صورة :

① $(٨)^{-١}$	② $(٦)^{-٢}$	③ $(\sqrt{٣})^{-٢}$	④ $(٣\sqrt{٧})^{-٣}$
⑤ $(٠,١)^{-٢}$	⑥ $(٠,٣)^{-٣}$	⑦ $(٣\sqrt{٢})^{-٢}$	⑧ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)^{-٤}$

❷ اوجد قيمة ما يأتي في أبسط صورة :

① $(\sqrt{٣})^{-٤} \times (\sqrt{٢})^{٤}$

② $\left(\frac{٧^{-٢} \times ٧^{-٤}}{٧^{-٦}}\right)^{-٢٠٠}$

③ $\frac{(٢\sqrt{٥})^{-٣} \times (٥\sqrt{٢})^{-٢}}{(٥\sqrt{٥})^{-٣} \times (٢\sqrt{٢})^{-٢}}$

④ $\frac{(\sqrt{٢})^{-٣} \times (\sqrt{٥})^{-٤} \times (\sqrt{٢})^{٤}}{(\sqrt{٥})^{-٢} \times (\sqrt{٢})^{-١}}$

⑤ $\frac{(١٠,٠)^{-٢} \times (٠١)^{-٣}}{(٠١)^{-٥} \times (٠,١٠٠)^{-٢}}$

⑥ $\frac{(س^{٢} ص)^{-٢} \times (س^{-١} ص^{٣})^{-١}}{(س^{٣} ص^{٢})^{-١}}$

❸ اختصر كلاً مما يأتي لأبسط صورة :

① $\frac{٢^{س} \times ٤^{س+١}}{٨^{س}}$

② $\frac{٢^{٤س} \times ٩^{س}}{٤^{س} \times ٦^{٢س}}$

③ $\frac{(٨١)^{س} \times ٦^{٢س}}{(٢٧)^{٢س-١} \times ٤^{س}}$

④ $\frac{٩^{ن+١} \times ٦^{٢ن-١}}{٣^{٤ن} \times ٢^{٢ن-١}}$

⑤ $\frac{(٢٧)^{ن+١} \times ٨^{ن}}{(٢٤)^{ن} \times ٩^{ن+١}}$

⑥ $\frac{(٢٧)^{س-١} \times ٨^{س} \times ٦^{س}}{(١٨)^{٢س} \times ٤^{س}}$

⑦ $\frac{٢^{ن} \times ٩^{ن+١}}{(١٨)^{ن}}$

⑧ $\frac{(٨١)^{ن} \times (٦٢٥)^{ن}}{(١٥)^{٤ن}}$

⑨ $\frac{(٣٦)^{ن} \times (٥)^{٢ن}}{(٣٠)^{٢ن}}$

⑩ $\frac{(٤)^{ن+١} \times (٨١)^{ن+١} \times (٤)^{١-ن}}{(٩)^{٢ن} \times ٥٤}$

❹ اختصر لأبسط صورة: $\frac{(٤)^{س+١} \times (٩)^{٢-س}}{(٦)^{٢س}}$ **ثم احسب قيمة الناتج عندما :** $س = ١$

❺ إذا كان : $أ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $ب = -١$ **أوجد قيمة :** $٧ أ^{٦} + (١ - ب)^{-٣}$

الدرس الثالث

المعادلات الأسية

المعادلة الأسية : هي المعادلة التي يكون المجهول المحتوى بها موجودا بالأس.

قواعد حل المعادلات الآسية

قاعدة (١):

إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ **فإن :** م = ن **حيث :** أ ∈ ح − {−١، ٠، ١}

فمثلاً : إذا كان : $(٥)^{س+١} = ١٢٥$

فإن : $(٥)^{س+١} = (٥)^{٣}$

∴ س + ١ = ٣

∴ س = ٣ − ١

∴ س = ٤

وأيضاً : إذا كان : $(\sqrt{٢})^{س-١} = ٨$

فإن : $(\sqrt{٢})^{س-١} = (٢)^{٣}$

$(\sqrt{٢})^{س-١} = (\sqrt{٢})^{٦}$

∴ س − ١ = ٦

∴ س = ٦ + ١

∴ س = ٧

قاعدة (٢):

إذا كان : $أ^{م} = ب^{م}$ **فإن :**

① أ = ب **إذا كان :** م **عدداً فردياً**

فمثلاً : إذا كان : $(س + ٢)^{٣} = ٢٧$

∴ $(س + ٢)^{٣} = (٣)^{٣}$

∴ س + ٢ = ٣

∴ س = ٣ − ٢

∴ س = ١

② أ = ± ب **إذا كان :** م **عدداً زوجياً**

فمثلاً : إذا كان : $(س - ٣)^{٦} = ١$

∴ $(س - ٣)^{٦} = (١)^{٦}$

∴ س − ٣ = ١

∴ س = ١ + ٣

∴ س = ٤

∴ س − ٣ = −١

∴ س = −١ + ٣

∴ س = ٢

∴ م.ح = {٤، ٢}

③ م = صفر **إذا كان :** أ ≠ ± ب

فمثلاً : إذا كان : $(٥)^{س-٣} = (٧)^{س-٣}$

∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣

مثـــــال

اوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في ح :

① $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \frac{١٢٥}{٢٧}$

② $(٥\sqrt{٥})^{س+١} = ١٢٥$

③ $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٩$

④ $٢^{س} \times ٥^{-س} = ٢,٥$

⑤ $(٣٢)^{س-٣} = (٨)^{٢س+١}$

⑥ $(٣)^{س-٣} = (\sqrt{٣})^{س+٥}$

⑦ $(٥)^{س^٢-٥س} = ٠,٠٠١٦$

⑧ $٢٥ \times ٣^{س-١} = ٩ \times ٥^{س-١}$

⑨ $(س+١)^{٦} = ٦٤$

⑩ $(٢س+٣)^{٣} = ٢٧$

⑪ $\frac{١}{(س+٩)^{٤}} = ٠,٠٠٠١$

⑫ $(٦)^{س^٢-٤} = (٧)^{٤-س^٢}$

الحـــــل

① $\because \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \frac{١٢٥}{٢٧}$

$\therefore \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٣}$

$\therefore \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٣}$

$\therefore س + ٢ = -٣$

$\therefore س = -٣ - ٢ = -٥$

$\therefore$ م.ح $= \{-٥\}$

② $\because (٥\sqrt{٥})^{س+١} = ١٢٥$

$\therefore (\sqrt{١٢٥})^{س+١} = (\sqrt{١٢٥})^{٢}$

$\therefore س + ١ = ٢$

$\therefore س = ٢ - ١$

$\therefore س = ١$

$\therefore$ م.ح $= \{١\}$

③ $\because (\sqrt{٣})^{س-١} = ٩$

$\therefore (\sqrt{٣})^{س-١} = (٣)^{٢}$

$\therefore (\sqrt{٣})^{س-١} = ((\sqrt{٣})^{٢})^{٢}$

$\therefore (\sqrt{٣})^{س-١} = ٤$

$\therefore س - ١ = ٤$

$\therefore س = ٤ + ١ = ٥$

$\therefore$ م.ح $= \{٥\}$

④ $\because ٢^{س} \times ٥^{-س} = ٢,٥$

$\therefore ٢^{س} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{س} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore \left(\frac{٢}{٥}\right)^{س} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{-١}$

$\therefore س = -١$

$\therefore$ م.ح $= \{-١\}$

⑤

$\because (٣٢)^{\text{س}-٣} = (٨)^{٢\text{س}+١}$

$\therefore [(٢)^{٥}]^{\text{س}-٣} = [(٢)^{٣}]^{٢\text{س}+١}$

$\therefore (٢)^{٥\text{س}-١٥} = (٢)^{٦\text{س}+٣}$

$\therefore ٥\text{س} - ١٥ = ٦\text{س} + ٣$

$\therefore ٦\text{س} - ٥\text{س} = -١٥ - ٣$

$\therefore \text{س} = -١٨$

$\therefore \text{م.ح} = \{-١٨\}$

⑥

$\because (٣)^{\text{س}-٣} = (\sqrt{٣})^{\text{س}+٥}$

$\therefore [(\sqrt{٣})^{٢}]^{\text{س}-٣} = (\sqrt{٣})^{\text{س}+٥}$

$\therefore (\sqrt{٣})^{٢\text{س}-٦} = (\sqrt{٣})^{\text{س}+٥}$

$\therefore ٢\text{س} - ٦ = \text{س} + ٥$

$\therefore ٢\text{س} - \text{س} = ٥ + ٦$

$\therefore \text{س} = ١١$

$\therefore \text{م.ح} = \{١١\}$

⑦

$\because (٥)^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}} = ٠,٠٠١٦$

$\therefore (٥)^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}} = \frac{١٦}{١٠٠٠٠}$

$\therefore (٥)^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}} = \frac{١}{٦٢٥} = \left(\frac{١}{٥}\right)^{٤}$

$\therefore (٥)^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}} = (٥)^{-٤}$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٥\text{س} = -٤$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤ = ٠$

$\therefore (\text{س}-١)(\text{س}-٤) = ٠$

$\therefore \text{س} - ١ = ٠$ | $\therefore \text{س} - ٤ = ٠$

$\therefore \text{س} = ١$ | $\therefore \text{س} = ٤$

$\therefore \text{م.ح} = \{١ ، ٤\}$

⑧

$\because ٢٥ \times ٣^{\text{س}-١} = ٩ \times ٥^{\text{س}-١}$

$\therefore \frac{(٣)^{\text{س}-١}}{(٥)^{\text{س}-١}} = \frac{٩}{٢٥}$

$\therefore \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{س}-١} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$

$\therefore \text{س} - ١ = ٢$

$\therefore \text{س} = ٢ + ١$

$\therefore \text{س} = ٣$

$\therefore \text{م.ح} = \{٣\}$

⑨

$\because (\text{س}+١)^{٦} = ٦٤$

$\therefore (\text{س}+١)^{٦} = (٢)^{٦}$

$\therefore \text{س} + ١ = \pm ٢$

$\therefore \text{س} + ١ = ٢$ | $\therefore \text{س} + ١ = -٢$

$\therefore \text{س} = ٢ - ١$ | $\therefore \text{س} = -٢ - ١$

$\therefore \text{س} = ١$ | $\therefore \text{س} = -٣$

$\therefore \text{م.ح} = \{١ ، -٣\}$

⑩

$\because (٢\text{س}+٣)^{٣} = ٢٧$

$\therefore (٢\text{س}+٣)^{٣} = (٣)^{٣}$

$\therefore ٢\text{س} + ٣ = ٣$

$\therefore ٢\text{س} = ٣ - ٣$

$\therefore ٢\text{س} = ٠$

$\therefore \text{س} = ٠$

$\therefore \text{م.ح} = \{٠\}$

⑪

$\because \frac{١}{(\text{س}+٩)^{٤}} = ٠,٠٠٠١$

$\therefore (\text{س}+٩)^{-٤} = (١٠)^{-٤}$

$\therefore \text{س} + ٩ = \pm ١٠$

$\therefore \text{س} + ٩ = ١٠$ | $\therefore \text{س} + ٩ = -١٠$

$\therefore \text{س} = ١٠ - ٩$ | $\therefore \text{س} = -١٠ - ٩$

$\therefore \text{س} = ١$ | $\therefore \text{س} = -١٩$

$\therefore \text{م.ح} = \{١ ، -١٩\}$

⑫

$\because (٦)^{\text{س}^{٢}-٤} = (٧)^{٤-\text{س}^{٢}}$

$\therefore (٦)^{\text{س}^{٢}-٤} = \left(\frac{١}{٧}\right)^{\text{س}^{٢}-٤}$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٤ = ٠$

$\therefore \text{س}^{٢} = ٤$

$\therefore \text{س} = \pm ٢$

$\therefore \text{م.ح} = \{٢ ، -٢\}$

مثـــــال

إذا كان : $\frac{(٨)^{\text{س}} \times (٩)^{\text{س}}}{(١٨)^{\text{س}}} = ٦٤$ **أوجد قيمة** : س **ثم أوجد قيمة** : $(٤)^{-\text{س}}$

الحـــــل

$\because \frac{(٨)^{\text{س}} \times (٩)^{\text{س}}}{(١٨)^{\text{س}}} = ٦٤$

$\therefore \frac{\left((٢)^{٣}\right)^{\text{س}} \times \left((٣)^{٢}\right)^{\text{س}}}{(٢ \times ٣^{٢})^{\text{س}}} = ٦٤$

$\therefore \frac{(٢)^{٣\text{س}} \times (٣)^{٢\text{س}}}{(٢)^{\text{س}} \times (٣)^{٢\text{س}}} = ٦٤$

$\therefore (٢)^{٣\text{س} - \text{س}} = ٦٤$

$\therefore (٢)^{٢\text{س}} = (٢)^{٦}$

$\therefore ٢\text{س} = ٦$

$\therefore \text{س} = ٣$

$\therefore (٤)^{-\text{س}} = (٤)^{-٣} = \frac{١}{٦٤}$

مثـــــال

إذا كان : $\frac{(١٠)^{٢\text{س}} \times (٤)^{\text{س}+١}}{٤ \times (٥)^{\text{س}} \times (١٦)^{\text{س}}} = (٠,٠٤)^{٢}$ **أوجد قيمة** : س

الحـــــل

$\because \frac{(١٠)^{٢\text{س}} \times (٤)^{\text{س}+١}}{٤ \times (٥)^{\text{س}} \times (١٦)^{\text{س}}} = (٠,٠٤)^{٢}$

$\therefore \frac{(٢ \times ٥)^{٢\text{س}} \times [(٢)^{٢}]^{\text{س}+١}}{(٢)^{٢} \times (٥)^{\text{س}} \times [(٢)^{٤}]^{\text{س}}} = (٠,٠٤)^{٢}$

$\therefore \frac{(٢)^{٢\text{س}} \times (٥)^{٢\text{س}} \times (٢)^{٢\text{س}+٢}}{(٢)^{٢} \times (٥)^{\text{س}} \times (٢)^{٤\text{س}}} = (٠,٠٤)^{٢}$

$\therefore (٢)^{٢\text{س}+٢\text{س}+٢-٢-٤\text{س}} \times (٥)^{٢\text{س}-\text{س}} = (٠,٠٤)^{٢}$

$\therefore (٢)^{\text{صفر}} \times (٥)^{\text{س}} = (٠,٠٤)^{٢}$

$\therefore (٥)^{\text{س}} = \frac{١}{٦٢٥}$

$\therefore (٥)^{\text{س}} = (٥)^{-٤}$

$\therefore \text{س} = -٤$

مثـــال

إذا كان : $\frac{(٤)^{س+١} \times (٩)^{س}}{(٦)^{٢س}} = ٢^{ص}$ **أوجد قيمة :** ص

الحـــل

$\because \frac{(٤)^{س+١} \times (٩)^{س}}{(٦)^{٢س}} = ٢^{ص}$

$\therefore \frac{[(٢)^{٢}]^{س+١} \times [(٣)^{٢}]^{س}}{(٢ \times ٣)^{٢س}} = ٢^{ص}$

$\therefore \frac{(٢)^{٢س+٢} \times (٣)^{٢س}}{(٢)^{٢س} \times (٣)^{٢س}} = ٢^{ص}$

$\therefore (٢)^{٢س+٢-٢س} = (٢)^{ص}$

$\therefore (٢)^{٢} = (٢)^{ص}$

$\therefore$ ص $= ٢$

مثـــال

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في ع :

① $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٢٠$

② $٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ١٢٥ = ٠$

الحـــل

① $\because ٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٢٠$

$\therefore ٢^{س} \times ٢^{١} + ٢^{س} \times ٢^{-١} = ٢٠$

$\therefore ٢^{س}(٢^{٢} + ٢^{-١}) = ٢٠$

$\therefore ٢^{س}(٢ + \frac{١}{٢}) = ٢٠$

$\therefore ٢^{س} \times \frac{٥}{٢} = ٢٠$

$\therefore ٢^{س} = ٢٠ \times \frac{٢}{٥}$

$\therefore ٢^{س} = ٨$

$\therefore ٢^{س} = ٢^{٣}$

$\therefore$ س $= ٣$

$\therefore$ م.ح $= \{٣\}$

② $٢٥^{س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ١٢٥ = ٠$

$\therefore (٥)^{٢س} - ١٢٦ \times (٥)^{س} + ١٢٥ = ٠$

$\therefore (٥^{س} - ٥)(٥^{س} - ٢٥) = ٠$

$\therefore ٥^{س} - ٥ = ٠$	$\therefore ٥^{س} - ٢٥ = ٠$
$\therefore ٥^{س} = ٥^{١}$	$\therefore ٥^{س} = ٢٥$
$\therefore$ س $= ١$	$\therefore ٥^{س} = ٥^{٢}$
	$\therefore$ س $= ٢$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، ٢\}$

تمارين على الدرس الثالث

❶ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

① $٣^{\text{س}-٢} = ٢٧$
② $٥^{٢\text{س}-١} = ١٢٥$
③ $٥^{٢\text{ن}-٣} = ٥$
④ $٣^{\text{ن}-١} = \frac{١}{٩}$
⑤ $٧^{\text{س}-٣} = \frac{١}{٣٤٣}$
⑥ $٨^{\text{ن}-٢} = ٤^{\text{ن}-١}$
⑦ $\text{س}^{٦} = ١$
⑧ $٥^{\text{ن}+٣} = ٧^{\text{ن}+٣}$
⑨ $٧^{\text{س}+٤} = ١$
⑩ $(٢\text{س}-١)^{٢} = ٢٥$
⑪ $(٢\text{س}-٥)^{٣} = ٢٧$
⑫ $٢^{\text{س}-٢} = ٩^{\text{س}-٢}$
⑬ $٨ \times (\sqrt{٢})^{\text{ن}-٣} = ١$
⑭ $٩^{٣\text{س}-٢} = ٧^{٣\text{س}-٢}$
⑮ $٤ \times ٣^{\text{س}-٢} = ٩ \times ٢^{\text{س}-٢}$
⑯ $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{\text{س}-٣} = ٦\frac{١}{٤}$
⑰ $(٣)^{\text{ن}-١} \times (٢)^{١-\text{ن}} = \frac{٢٧}{٨}$
⑱ $٣ \times (٩)^{٢\text{ن}-١} = \frac{١}{٢٤٣}$
⑲ $١٢٥\,\text{س}^{٣} = -٨$
⑳ $(٢)^{\text{س}^{٢}-\text{س}} = ٤$
㉑ $(٢)^{\text{س}^{٢}-١} = (٥)^{١-\text{س}^{٢}}$
㉒ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{ن}-٤} = ٢\frac{١}{٤}$
㉓ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{ن}+٥} = \left(٣\frac{٣}{٨}\right)^{-٢}$
㉔ $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-\text{س}} = ٩$

❷ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في ح :

① $(٣)^{\text{س}-١} + (٣)^{\text{س}+١} = ٩٠$
② $(٢)^{٢\text{س}+١} + (٢)^{٢\text{س}-١} = ١٠$
③ $(٢)^{\text{س}+٢} + (٢)^{\text{س}} = ٢,٥$
④ $(٣)^{\text{س}+١} + (٣)^{\text{س}-٢} = ٨٤$
⑤ $(٣)^{٢\text{س}} - ١٢ \times (٣)^{\text{س}} + ٢٧ = ٠$
⑥ $(٢)^{٢\text{س}} - ٦ \times (٢)^{\text{س}} + ٨ = ٠$
⑦ $(٥)^{٢\text{س}} - ٢٦ \times (٥)^{\text{س}} + ٢٥ = ٠$
⑧ $٩^{\text{س}} - ٤ \times ٣^{\text{س}} + ٣ = ٠$

❸ إذا كان : $\frac{(٣)^{\text{ن}} \times (٨)^{\text{ن}}}{(١٢)^{\text{ن}+١}} = \frac{٨}{٣}$ **أوجد قيمة :** ن

❹ إذا كان : $\frac{(١٤)^{٢\text{ن}} \times (٤)^{\text{ن}+١}}{٤ \times (٧)^{\text{ن}} \times (١٦)^{\text{ن}}} = ٤٩$ **أوجد قيمة :** ن

❺ إذا كان : $\frac{(٤)^{\text{ن}} \times (٦)^{٢\text{ن}}}{(٢)^{٤\text{ن}} \times (٣)^{٢\text{ن}+٢}} = ٩^{\text{ن}}$ **أوجد قيمة :** ن

❻ إذا كان : $\frac{(٤٩)^{\text{ن}} \times (٢٥)^{٢\text{ن}} \times (٣)^{٤\text{ن}}}{(٧)^{-\text{ن}} \times (١٥)^{٤\text{ن}}} = ٣٤٣$ **أوجد قيمة :** $(٦)^{٢\text{ن}}$

❼ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان: $(٥)^{س-١} = (٧)^{س-١}$ فإن : س = ...

(أ) -١ (ب) ١ (ج) ٥ (د) ٧

② إذا كان : $(٠,٥)^{س} = ٤$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) ١ (د) -١

③ إذا كان : $٥^{س+٢} = ٩^{س+٢}$ فإن : س = ...

(أ) -٢ (ب) ٢ (ج) ٩ (د) ٥

④ إذا كان : $(س-٢)^{٢} = ٩$ فإن : س ∈ ....

(أ) {٥} (ب) {-١} (ج) {-١، ٥} (د) {١١}

⑤ إذا كان : $(٢)^{س-٤} = ١$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

⑥ إذا كان : $(\sqrt{٣})^{س+٢} = ٩\sqrt{٣}$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

⑦ إذا كان : $(\sqrt{١,٥})^{س} = \frac{٤}{٩}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) ٤ (د) -٤

⑧ إذا كان : $(\sqrt{١,٥})^{س} = \frac{٤}{٩}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ١

---

❽ أكمل العبارات الآتية :

① إذا كان : $(٨)^{٢س+١} = (٤)^{٣ص+٩}$ فإن : س - ص = ...

② إذا كان : $(٣)^{س} = ٢٧$ ، $٤^{س+ص} = ١$ فإن : ص = ...

③ إذا كان : $(٤)^{س-١٠} = \frac{١}{١٦}$ فإن : $\sqrt[٣]{س}$ = ...

④ إذا كان : $(٥)^{س^{٢}-١} = ١$ فإن : س = ...

⑤ إذا كان : $(٢)^{س} + (٢)^{س+١} = \frac{٣}{٢}$ فإن : س = ...

الدرس الرابع

العمليات الحسابية على القوى الصحيحة

للعمليات الحسابية ترتيب تم الإتفاق عليه لتلافي الإختلاف في النتائج وهذا الترتيب هو:

① إجراء العمليات داخل الأقواس الداخلية ثم الأقواس الخارجية ← ② حساب قوى العدد (الأسس) ← ③ الضرب والقسمة من اليمين إلى اليسار ← ④ الجمع والطرح من اليمين إلى اليسار

مثال

أوجد ناتج ما يأتي :

① $٢ \, [\, (٦)^{٢} \div ٦ \times ٣ \,]$

② $[\, (٥)^{٢} + ١ \,] - [\, (٤)^{٢} - ١ \,]$

الحل

① $٢ \, [\, (٦)^{٢} \div ٦ \times ٣ \,]$

$= ٢ \, [\, ٣٦ \div ٦ \times ٣ \,]$

$= ٢ \, (\, ٦ \times ٣ \,)$

$= ٢ \times ١٨$

$= ٣٦$

② $[\, (٥)^{٢} + ١ \,] - [\, (٤)^{٢} - ١ \,]$

$= [\, ٢٥ + ١ \,] - [\, ١٦ - ١ \,]$

$= ٢٦ - ١٥$

$= ١١$

مثال

أوجد ناتج ما يأتي :

① $$\frac{٤ \times ٣^{س+١} - ١١ \times ٣^{س-١}}{٢ \times ٣^{س} + ٧ \times ٣^{س-٢}}$$

② $$\frac{٢ \times ٥^{٢س-٢} - ٧ \times ٥^{٢س-٣}}{٨ \times ٥^{٢س-٣} - ٢٥^{س-١}}$$

الحل

① $$\frac{٤ \times ٣^{س+١} - ١١ \times ٣^{س-١}}{٢ \times ٣^{س} + ٧ \times ٣^{س-٢}}$$

$$= \frac{٤ \times ٣^{س} \times ٣ - ١١ \times ٣^{س} \times ٣^{-١}}{٢ \times ٣^{س} + ٧ \times ٣^{س} \times ٣^{-٢}}$$

$$= \frac{٣^{س} \, (\, ٤ \times ٣ - ١١ \times \frac{١}{٣} \,)}{٣^{س} \, (\, ٢ + ٧ \times \frac{١}{٩} \,)}$$

$$= \frac{\frac{٢٥}{٣}}{\frac{٢٥}{٩}} = \frac{٢٥}{٣} \times \frac{٩}{٢٥}$$

$= ٣$

② $\dfrac{٢\times٥^{٢س-٢} - ٧\times٥^{٢س-٣}}{٨\times٥^{٢س-٣} - ٢٥^{س-١}}$

$= \dfrac{٢\times٥^{٢س}\times٥^{-٢} - ٧\times٥^{٢س}\times٥^{-٣}}{٨\times٥^{٢س}\times٥^{-٣} - ٥^{٢س}\times٥^{-٢}}$

$= \dfrac{٥^{٢س}\left(٢\times\frac{١}{٢٥} - ٧\times\frac{١}{١٢٥}\right)}{٥^{٢س}\left(٨\times\frac{١}{١٢٥} - \frac{١}{٢٥}\right)}$

$= \dfrac{\frac{٢}{٢٥} - \frac{٧}{١٢٥}}{\frac{٨}{١٢٥} - \frac{١}{٢٥}} = \dfrac{\frac{٣}{١٢٥}}{\frac{٣}{١٢٥}}$

$= ١$

مثـــــال

أوجد قيمة س في كل مما يأتي :

① $\dfrac{(٢٧)^{س-١} \div (٢)^{-٣س}}{(٢\sqrt{٢})^{٢س}\times(٣\sqrt{٣})^{٢س}} = (٣)^{س}$

② $\dfrac{(٢)^{س+١} - (٢)^{س}}{(٢)^{س} - (٢)^{س-١}} = (٢)^{س-٢}$

الحـــــل

① $\because \dfrac{(٢٧)^{س-١} \div (٢)^{-٣س}}{(٢\sqrt{٢})^{٢س}\times(٣\sqrt{٣})^{٢س}} = (٣)^{س}$

$\therefore \dfrac{(٣)^{٣س-٣} \div (٢)^{-٣س}}{(٢)^{٢س}\times(\sqrt{٢})^{٢س}\times(٣)^{٢س}\times(\sqrt{٣})^{٢س}} = (٣)^{س}$

$\therefore \dfrac{(٣)^{٣س-٣} \div (٢)^{-٣س}}{(٢)^{٢س}\times(٢)^{س}\times(٣)^{٢س}\times(٣)^{س}} = (٣)^{س}$

$\therefore \dfrac{(٣)^{٣س-٣} \times (٢)^{٣س}}{(٢)^{٢س}\times(٢)^{س}\times(٣)^{٢س}\times(٣)^{س}} = (٣)^{س}$

$\therefore (٣)^{٣س-٣-٢س-س} \times (٢)^{٣س-٢س-س} = (٣)^{س}$

$\therefore (٣)^{-٣} = (٣)^{س}$

$\therefore س = -٣$

② $\dfrac{(٢)^{س+١} - (٢)^{س}}{(٢)^{س} - (٢)^{س-١}} = (٢)^{س-٢}$

$\therefore \dfrac{٢^{س}\times٢ - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س}\times٢^{-١}} = (٢)^{س-٢}$

$\therefore \dfrac{٢^{س}(٢-١)}{٢^{س}(١-\frac{١}{٢})} = (٢)^{س-٢}$

$\therefore \dfrac{١}{\frac{١}{٢}} = (٢)^{س-٢}$

$\therefore (٢)^{١} = (٢)^{س-٢}$

$\therefore س - ٢ = ١$

$\therefore س = ٣$

تمارين على الدرس الرابع

❶ أكمل العبارات الآتية :

① المقدار : $\frac{٣^{س} \times ٣^{س} \times ٣^{س}}{٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س}}$ يساوي ....

② $(٥^{س+٢} - ٥^{س+١}) \div ٥^{س} =$ ....

③ إذا كان : $٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س} = ١$ فإن : $س =$ ....

④ إذا كان : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} = ٢$ فإن : $س =$ ....

⑤ إذا كان : $٧ \times ٣^{س} - ٣^{س+١} = \frac{٤}{٩}$ فإن : $س =$ ....

❷ أوجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة :

① $٢^{-٣} \times ٢^{-٢} \div ٤^{-٣}$

② $٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \div ٦^{-٤}$

③ $٤^{٣} \times ٣^{-٢} \times (\sqrt[٣]{٨})^{-٥}$

④ $(\sqrt{٥})^{٥} \div ٥\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

⑤ $٤^{٣} \times ٣^{-٢} \times (\sqrt[٣]{٨})^{-٥}$

⑥ $\frac{٢(\sqrt{٣})^{٥} \div ٣\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣} + (\sqrt{٣} - ١)^{٢}}$

❸ أثبت أن :

① $\frac{(٣)^{س+١} + (٣)^{س+٢}}{(٣)^{س}} = ١٢$

② $\frac{١٦ \times (٢)^{٢س} - ٢ \times (٤)^{س}}{٢ \times (٤)^{س} + ٥ \times (٢)^{٢س}} = ٢$

③ $\frac{٨ \times (٢)^{٢س} + ٢ \times (٢^{س})^{٢}}{\frac{٣}{٢} \times (٢)^{٢س} - (٢)^{س} \times (٢)^{س}} = ٢٠$

④ $\frac{(٢)^{٣س+٣} - (٢)^{٣س+١}}{٤ \times (٢)^{٣س} - ٦ \times (٢)^{٣س-١}} = ٦$

⑤ $\frac{(٣)^{س+٥} + ٥٤ \times (٣)^{س}}{(٣)^{س+٣} + ٨ \times (٣)^{س+٢}} = ٣$

⑥ $\frac{٤ \times (٢)^{س-١} + ٣ \times (٢)^{س+١}}{٥ \times (٢)^{س} - ٦ \times (٢)^{س-١}} = ٤$

❹ إذا كان : $أ = \sqrt{٢}$ ، $ب = \sqrt{٣}$ أوجد قيمة كل من :

① $\frac{ب^{٤} - أ^{٤}}{ب^{٢} + أ^{٢}}$

② $\frac{أ^{٣} + ب^{٣}}{أ + ب}$

الدرس الأول

الإحتمال

d

مفهوم العينة:

يقوم الباحث بجمع البيانات حول الظاهرة محل الدراسة من بعض مفردات المجتمع الإحصائي وليس كل مفرداته وذلك باختيار عينة ممثلة للمجتمع الإحصائي وإجراء البحث عليها ، النتائج التي يصل إليها يقوم بتعميمها على المجتمع كله.

تعريف العينة:

هي جزء صغير من المجتمع ، تشبه المجتمع و تمثله ، وتختار بطريقة عشوائية .

الإحتمال

الاحتمال التجريبي

أراد مدرب المنتخب الوطني لكرة القدم أثناء التدريبات اختيار أحد لاعبي الفريق لتسديد ركلة جزاء خلال المباراة فقام باختيار أربعة لاعبين من الفريق وطلب من كل منهم تسديد ١٠ ركلات جزاء وحصل عل النتائج التالية:

اللاعب	عماد متعب	محمد أبوتريكة	وائل جمعة	محمد بركات
عدد الركلات التي سُددت هدفاً	٦	٨	٥	٧
عدد الركلات التي لم تسدد	٤	٢	٥	٣

فأي هؤلاء اللاعبين سوف يختار المدرب ؟؟؟؟

مما سبق نجد :

(١)اللاعب عماد متعب : سجل ٦ ركلات جزاء من بين ١٠ ركلات وهذا يعني أن احتمال تسديده لهدف من ركلة جزاء أثناء المباراة يساوي $\frac{٦}{١٠}$

(٢)اللاعب محمد أبو تريكة : سجل ٨ ركلات جزاء من بين ١٠ ركلات وهذا يعني أن احتمال تسديده لهدف من ركلة جزاء أثناء المباراة يساوي $\frac{٨}{١٠}$

(٣)اللاعب وائل جمعة : سجل ٥ ركلات جزاء من بين ١٠ ركلات وهذا يعني أن احتمال تسديده لهدف من ركلة جزاء أثناء المباراة يساوي $\frac{٥}{١٠}$

(٤)اللاعب محمد بركات : سجل ٧ ركلات جزاء من بين ١٠ ركلات وهذا يعني أن احتمال تسديده لهدف من ركلة جزاء أثناء المباراة يساوي $\frac{٧}{١٠}$

مما سبق نجد :

اللاعب محمد أبو تريكة هو صاحب أكبر احتمال لتسديد هدف من ركلة جزاء وبالتالي سوف يعتمد عليه المدرب لتسديد ركلات الجزاء في المباراة .

وعلى ذلك يمكن القول أن:الاحتمال التجريبي لحدث ما = $\frac{\text{عدد مرات الحصول على الحدث}}{\text{عدد المحاولات الكلي}}$

الاحتمال النظري

- **التجربة العشوائية:**

♥ هي تجربة نستطيع د يع نو تجها قبل جر ئها
سو يتحقق فعلا عند جر ئها.

فمثلاً :

♥ تجربة لقا قطعة نقو معدنية مر حد ملاحظه لوجه لظاهر هي تجربة عشو ئية .

♥ تجربة ختيا كر من صند تو على ٥ كر قا ، ٣ كر بيضا ، كرتا ر هي تجربة عشو ئية يضا.

♥ ما تجربة ختيا كر من صند به ١٠ كر بيضا ليست تجربة عشو ئية (لما ؟)

- **فضاء العينة (فضاء النواتج ـ فراغ العينة):**

♥ **هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث للتجربة العشوائية ويرمز لها بالرمز(ف).**

فمثلاً :

♥ **عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر فإن:** ف = {صو ، كتابة }

♥ **عند إلقاء حجر نرد منتظم (زهر طاولة) مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي فإن:** ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

- **الحدث :**

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

فمثلاً :

♥ **إذا كان أ هو حدث ظهور عدد أولي عند إلقاء حجر نرد منتظم فإن :** أ = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

لاحظ أن : أ ⊂ ف

إذا كان : أ حدث من ف (فضاء العينة لتجربة عشوائية ما)

فإن احتمال وقوع الحدث أ يرمز له بالرمز ل (أ) ويعطى بالعلاقة :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$$

مثـــال

إذا ألقي حجر نرد منظم مرة واحدة ولُوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

① أ حدث الحصول على عدد زوجي

② ب حدث الحصول على عدد أقل من ٣

③ حـ حدث الحصول على عدد أولي

④ ء حدث الحصول على عدد يقبل القسمة على ٥

⑤ هـ حدث الحصول على عدد مربع كامل

⑥ س حدث الحصول على عدد أقل من أو يساوي ٤

⑦ ص حدث الحصول على عدد أقل من ٧

⑧ ع حدث الحصول على عدد مكون من رقمين

الحـــل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن (ف) = ٦

① أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ن(أ) = ٣ ، $ل(أ) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

② ب = {١ ، ٢} ، ن(ب) = ٢ ، $ل(ب) = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

③ حـ = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ن(حـ) = ٣ ، $ل(حـ) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

④ ء = {٥} ، ن(ء) = ١ ، $ل(ء) = \frac{١}{٦}$

⑤ هـ = {١ ، ٤} ، ن(هـ) = ٢ ، $ل(هـ) = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

⑥ س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ن(س) = ٤ ، $ل(أ) = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

⑦ ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن(ص) = ٦ ، $ل(ص) = \frac{٦}{٦} = ١$ **(حدث مؤكد)**

⑧ ع = ∅ ، ن(ع) = صفر ، $ل(ع) = \frac{\text{صفر}}{٦} =$ صفر **(حدث مستحيل)**

ملاحظات

❶ **الحدث المستحيل هو الحدث الذي ليس له أي فرصة للوقوع .**

أي أن: إذا كان أ حدث مستحيل فإن: أ = $\emptyset$ ، ل (أ) = صفر

(احتمال الحدث المستحيل = صفر)

❷ **الحدث المؤكد هو الحدث الذي له كل النواتج الممكنة.**

أي أن: إذا كان أ حدث مؤكد فإن أ = ف ، ل(أ) = ١

(احتمال الحدث المؤكد = ١)

❸ **قيمة الحدث لا تقل عن الصفر ولا تزيد عن الواحد الصحيح.**

أي أن: إذا كان: أ حدث ما فإن : صفر $\leqslant$ ل(أ) $\leqslant$ ١

أي أن : ل(أ) $\in$ [٠، ١]

وعلى ذلك فكل من الأعداد الآتية يمكن أن تكون احتمال وقوع أحد الأحداث:

صفر ، ٠,٦ ، ٧٥ ٪ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ١

أما الأعداد الآتية فلا يمكن أن تكون احتمال وقوع أحد الأحداث:

- ٠,٦ ، ١,٢ ، ١٢٥ ٪ ، $\frac{٥}{٢}$ ، - $\frac{٢}{٣}$

مثـــــال

صندوق يحتوي على ٢٠كرة، منها ٨ كرات حمراء، ٧ كرات زرقاء، وباقي الكرات صفراء. سحبت منه كرة واحدة عشوائياً.أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

① صفراء ② زرقاء ③ حمراء ④ ليست زرقاء

الحـــل

عدد الكرات الصفراء = ٢٠ - (٨+٧) = ٢٠ - ١٥ = ٥

① احتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء = $\frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$

② احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء = $\frac{٧}{٢٠}$

③ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = $\frac{٨}{٢٠} = \frac{٢}{٥}$

④ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست زرقاء = $\frac{١٣}{٢٠}$

من المثال السابق نلاحظ أن :

ل(كرة صفراء) + ل(كرة زرقاء) + ل(كرة حمراء) = ١

أي أن: مجموع الإحتمالات المتنافية لتجربة عشوائية ما يساوي الواحد الصحيح.

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء + احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست زرقاء

$$= \frac{٧}{٢٠} + \frac{١٣}{٢٠} = ١$$

أي أن : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست زرقاء= ١ - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء

وعموماً إذا كان أ حدث من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن:

احتمال عدم وقوع الحدث أ = ١ - ل(أ)

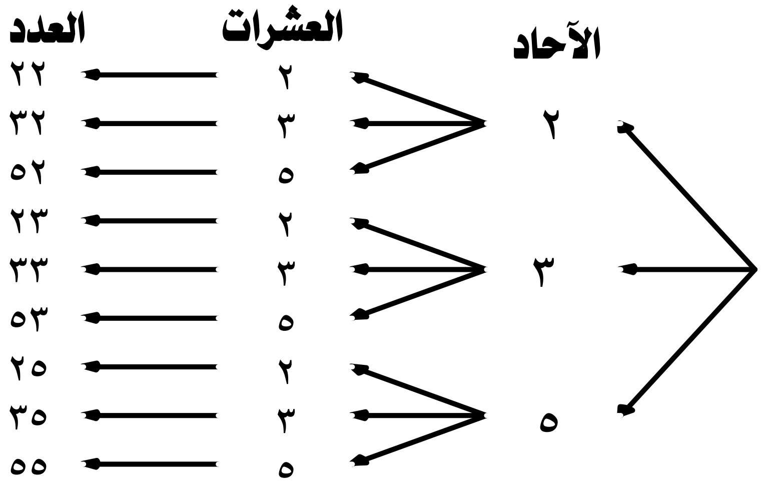
مثـــــال

من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٥ } كّون عدداً من رقمين أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية

① حدث أن يكون رقم العشرات فردياً **② حدث أن يكون رقم الآحاد فردياً**

③حدث أن يكون مجموع الرقمين ٧ **④ حدث أن يكون حاصل ضرب الرقمين ١٥**

الحـــــل



ف = { ٢٢، ٣٢، ٥٢، ٢٣، ٣٣، ٥٣، ٢٥، ٣٥، ٥٥ } ، ن(ف) = ٩

① حدث أن يكون رقم العشرات فردياً = { ٣٢ ، ٥٢ ، ٣٣ ، ٥٣ ، ٣٥ ، ٥٥ }

احتمال أن يكون رقم العشرات فردياً $= \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

② حدث أن يكون رقم الآحاد فردياً = { ٢٣، ٣٣، ٥٣، ٢٥، ٣٥، ٥٥ }

احتمال أن يكون رقم الآحاد فردياً = $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

③ حدث أن يكون مجموع الرقمين ٧ = { ٥٢، ٢٥ }

احتمال أن يكون مجموع الرقمين ٧ = $\frac{٢}{٩}$

④ حدث أن يكون حاصل ضرب الرقمين ١٥ = { ٥٣، ٣٥ }

احتمال أن يكون حاصل ضرب الرقمين ١٥ = $\frac{٢}{٩}$

مثـــــال

في دراسة لإستطلاع أراء مجموعة من الأشخاص تبين أن ١٥ شخصاً يفضلون مشاهدة الأخبار ، ٣٢ شخصاً يفضلون مشاهدة المسلسلات ، ١٨ شخصاً يفضلون مشاهد الأفلام ، ٣٥ شخصاً يفضلون مشاهدة البرامج الدينية . اختير أحد هؤلاء الأشخاص بطريقة عشوائية :

ما احتمال أن يكون الشخص المختار ممن :

① يفضلون مشاهدة الأخبار ؟ ② لايفضلون مشاهدة الأفلام ؟

③ يفضلون مشاهدة المسلسلات أو الأفلام ؟

إذا أجرى أستطلاع الرأي على عينة حجمها ٣٠٠ شخص فما هو العدد المتوقع للأشخاص الذين يفضلون مشاهدة البرامج الدينية ؟

الحـــــل

العدد الكلي = ١٥ + ٣٢ + ١٨ + ٣٥ = ١٠٠

① احتمال أن يكون الشخص المختار ممن يفضلون مشاهدة الأخبار = $\frac{١٥}{١٠٠} = \frac{٣}{٢٠}$

② احتمال أن يكون الشخص المختار ممن لايفضلون مشاهدة الأفلام = ١ - $\frac{١٨}{١٠٠} = \frac{٨٢}{١٠٠} = \frac{٤١}{٥٠}$

③ احتمال أن يكون الشخص المختار ممن يفضلون مشاهدة المسلسلات أو الأفلام = $\frac{٣٢+١٨}{١٠٠} = \frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{١}{٢}$

احتمال أن يكون الشخص المختار ممن يفضلون مشاهدة البرامج الدينية = $\frac{٣٥}{١٠٠}$

العدد المتوقع للأشخاص الذين يفضلون مشاهدة البرامج الدينية

= الإحتمال × العدد الكلي = $\frac{٣٥}{١٠٠} \times ٣٠٠ = ١٠٥$