رياضيات الحاسب

المحتــويـــات

مقدمة..

تم بدء التعامل مع لغة الأرقام والحاسب ما بين عامي 1804 . 1848 ولكن ما هي هذه اللغة وكيف يتم التعامل معها بل كيف تتكون وتتحول من أرقام إلى بيانات وبالعكس.

أنظمة الجيل الثاني استغلت تقنية شبه الموصل التي تميزت باستبدال الترانزستورات بالأنابيب المفرغة. هذا الحجم الطبيعي المخفّض، استعمال حاسبات أسرع وقوّة أعظم. الترانزيستور طوّر أولياً بمختبرات Bell وهي شركة أمريكية كبيرة.

وهذا مما دفع إلى تقدم هائل في التقنيات المتعلقة به ويقوم مبدأ لغة الآلة على الترانزستورات داخل وحدة المعالجة المركزية فإذا كانت الكهرباء تنساب من خلالها فهذا يشكل القيمة 1 أما إذا كان معطلاً أي لا تنساب الكهرباء فهذا يشكل القيمة 0. وبما أن المعالج يحتوي على عدد هائل جداً من الترانزستورات البالغة في الصغر (55 مليون ترانزيستور في معالجات البينتيوم 4) وإن تجميع تلك القيم من الترانزستورات سيمكننا من استعمالها لتمثيل أرقام أكبر. وهذا الكلام ينطبق على كافة أجزاء الحاسب فالمكثف الكهربائي يتعامل بنفس المبدأ أيضاً. وكذلك طرق التخزين والقراءة.

بعد أن عرفنا المبدأ الأساسي للغة الآلة حيث يتم تحويل كل البرامج التي تُكتب باللغات البرمجية المفهومة بالنسبة لنا إلى لغة الآلة الرقمية ليتم معالجتها وتنفيذ الأوامر التي تحتوي عليها. ـ وسنأتي لشرح ذلك في الأقسام القادمة . ما يهمنا الآن هنا هو معرفة أن هذه القيم 0 أو 1 أياً منها يدعى Bit وإن مجموع ثمانية بيتات يؤلف Byte.

وقد كان في السابق البايت يساوي 4 بيت ثم تطور ليغطي كافة الرموز والأحرف والأرقام ليصبح 7 بيت ودعي ذلك بالـ ASCII غير أن IBM و Microsoft وجدوا أنه من الأدق والأفضل جعل البايت يساوي 8 بيت وذلك لتغطية كافة الرموز والأحرف والأرقام حتى أصبحت اللغة الثانية الآن تغطي 256 رمزاً مختلفاً.

وعلم نظم العد هو من العلوم الأساسية و المطلوبة في علوم البرمجة وعلوم الحاسب. فالحواسيب كأي آلة إلكترونية يعمل بالكهرباء وكل تمثيل للبيانات في داخله ما هي إلا صورة لجهود كهربائية تتأرجح ما بين الجهد الأعلى وجهد أدنى، أو ما تسمى بـالجهود المنطقيـة لأنهـا يعبـر عنهـا بـ true أو false أو بـ 0 و 1. لو قمنا بعملية جراحية للحاسب لوصلنا أنه مجموعة هائلة من الأسلاك والروابط الكهربائية. كل سلك يمر به جهد كهربائي، إما الجهد الأعلى، أو جهد أدنى. فكل سلك هو حامل لمعلومة وهي ترمز إما صفر و إما واحد حسب قيمة الجهد المار بالسلك. فكل سلك حامل لمعلومة يطلق عليه اسم BIT ومجموعة من البتات ستكون هي أول نظام عد يستطيع الحاسب العمل به.

وهو النظام الوحيد الذي يتعامل مع نظام العد بالرقمين الصفر والواحد، لا مكان لـ 2 أو 3 أو 4 ....، فقط 0 و 1.

إن أنظمة العد المستخدمة في العالم اليوم تتنوع بحسب مجال استخدامها، والمقصود بنظام العد هنا هو طريقة تعامل الإنسان مع رسوم الأرقام للتعبير عن قيمتها وكيفية تطبيق العمليات الحسابية عليها.

النظام الأوسع انتشاراً هو النظام العشري المعتمد على الخانات والصفر للتعبير عن الاختلافات بين قيم رسم الرقم الواحد فمثلا الرقم 6 يحمل قيمة ستون عندما يوضع في الخانة الثانية، وقد تم ابتداع الصفر في مرحلة متأخرة نسبياً عن ابتداع الأرقام واستخدم مع نظام الخانات للتعبير عن خلو هذه الخانة من القيمة.

النظام العشري

هو من أقدم أنظمة الأرقام شيوعاً وتعاملاً، النظام العددي المعمول به عادة هو نظام العد العشري Decimal System وسمي بـ العشري لأنه يستخدم عشرة رموز لكتابة أي عدد صحيح و هي:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

فكل عدد في هذا النظام لا يستخدم إلا هذه الرموز فقط...

عدد مكونات النظام العشري هو عشرة أرقام، حيث انه يكبر بعد كل عشرة أرقام، مثل بسيط هو التالي:

11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

لاحظ الاختلاف بين الـ 9 و الـ 10 حيث انه عندما انتهينا من الأرقام (أخر رقم هو 9) رجعنا للرقم الأول وهو صفر وأضفنا واحد بجواره، و لو واصلنا العد لوصلنا إلى الـ 19 وثم نرجع الرقم 9 إلى صفر و نضيف واحد إلى الرقم 1 فيصبح الرقم 20 وهكذا دواليك.

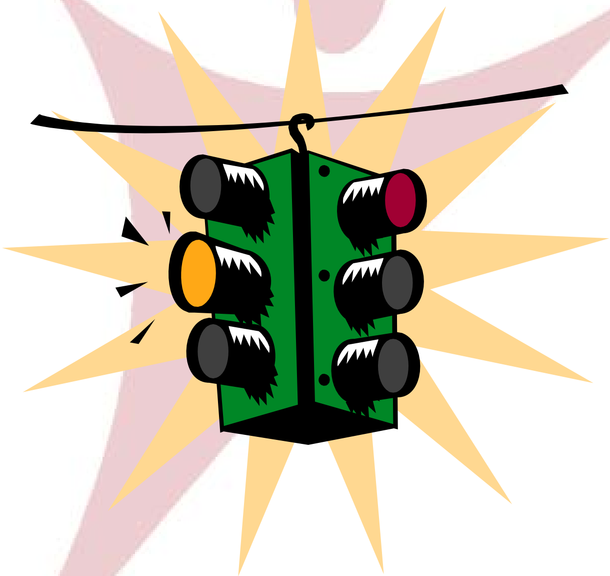
وللنظام العشري خاصية مرتبة الرقم فعلى سبيل المثال الرقم 128 نجد أن الرقم الأول وهو 8 يقع في مرتبة الآحاد وتكون قيمته هي $(1\times8 = 8)$. أما الرقم الثاني وهو 2 فيقع في المرتبة الثانية وهي العشرات فتكون قيمته هي $(10 \times 2 = 20)$ أما الرقم الثالث 1 فيقع في مرتبة المئات وقيمته هي $(1\times100 = 100)$ فإذا جمعنا خانات الأرقام الثلاثة أصبحت قيمة الرقم 128.

وعليه فيمكننا تمثيل العدد 128 كالتالي:

1	2	8
المئات	العشرات	الآحاد
10^2	10^1	10^0

$$1\times10^2 + 2\times10^1 + 8\times10^0$$

$$(128)10 = 100 + 20 + 8$$



النظام الثنائي

نظام العد الذي نستخدمه في حياتنا اليومية يسمى نظام العد العشري، نقوم فيه بترتيب الأرقام بجانب بعضها البعض وتكون الأرقام عبارة عن 0 و 1 و .. و 9، والرقم الأول يحدد قيمة الآحاد والثاني يحدد قيمة العشرات فالمئات، في كل مربع نقوم بوضع قيمة ما نضربها في قيمة الخانة ونجمع الناتج لنحصل على الرقم النهائي فمثلا 365 يتم حسابه كالآتي :

100	10	1
3	6	5

العدد = $3 \times 100 + 6 \times 10 + 5 \times 1$

الأمر لا يختلف كثيراً في نظام العد الثنائي، إلا أنك لا تستخدم إلا الرقمان 0 و 1 لتحديد قيمة كل خانة، وقيمة كل خانة تختلف في تسلسلها عن قيم الخانات في نظام العد الستعشري، فهي تكون عبارة عن 1 ثم 2 ثم 4 ثم 8 وهكذا في كل مرة تضرب الرقم 2 في العدد الأخير لتحصل على العدد التالي.

ويقوم الكمبيوتر بجميع عملياته باستخدام نظام العد الثنائي، لأنه يعطي كل خانة أحد قيمتين فقط إما 0 أو 1 وذلك عن طريق التمييز بين عمليتين فيزيائيتين تحدثان داخل الكمبيوتر هما توصيل التيار (1) وقطع التيار (0)، وفي الأقراص الصلبة تخزن المعلومات في صورة مغناطيسات صغيرة منتشرة على سطح من مادة خاصة (فيرومغناطيسية) وهي تميز أيضا بين حالتين فقط الأولى عندما يكون اتجاه قطب المغناطيس الصغير الموجب إلى الأعلى، والحالة الثانية هي الحالة المعاكسة، لهذا السبب فإن الكمبيوتر لا بد له من استخدام نظام العد الثنائي.

تخزين البيانات:

في الأعداد العشرية إذا قلنا أننا نستطيع كتابة 5 خانات فهذا يعني أننا نستطيع كتابة الأرقام من 0 إلى 99999 أي تفسير ذلك أننا نستطيع ترتيب الأرقام من 0 إلى 9 (عشرة أرقام) في خمس خانات فذلك يعني أننا نستطيع تغيير الأرقام وترتيبها للحصول على العديد الاحتمالات، عدد هذا الاحتمالات هو:

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ لأن كل خانة تحتمل 10 احتمالات، وكل احتمال منها يحتمل عشر احتمالات معه في الخانة المجاورة وهكذا حتى الخانة الأخيرة، وهذا يعني أننا نمتلك عدد من الاحتمالات يساوي 10 أس 5 أي عدد الأرقام في كل خانة أس عدد الخانات، ويكون الناتج هو 100000 احتمال كل منها يعبر عن رقم وهذه الأرقام تبدأ من 0 إلى 99999.

الأمر ينطبق هنا أيضاً على الأعداد الثنائية، فإذا قلنا أن عدد الخانات هو 5 فإن عدد الاحتمالات الكلية = عدد الاحتمالات في كل خانة أس عدد الخانات = $5^2 = 32$ وهي 32 احتمال تعبر عن الأرقام من 0 إلى 31، ويسمى عدد الخانات بطول الرقم، فالمتغيرة أو العداد أو أي شيء طوله 5 يعني أنه يتكون من 5 خانات ثنائية.

وقد تم الاتفاق على أن كل خانة تسمى (بت) وكل 8 خانات (8 بتات) تسمى بايت، والبايت الواحد عبارة عن خانة كبيرة عدد احتمالاتها هو $8^2 = 256$ أي أنها تأخذ الأرقام من 0 إلى 255، وقد تم الاتفاق على أن يتم إعطاء كل رقم وحرف ورمز قيمة مقابلة بين الرقمين 0 و 255، حسب ما يسمى بصفحة المحارف، أشهر صفحات المحارف الإنجليزية هي صفحة الأسكي ASCII والأنسي ANSI، ولكن هذا العدد من الخانات في جدول الأسكي سرعان ما يمتلأ بالحروف والأرقام، فلا يبقى أماكن شاغرة فيه للرموز الإضافية كالرموز العربية ورموز اللغات الأخرى، وهنا قامت كل لغة بعمل صفحة محارف خاصة بها، وقامت عدة هيئات عربية بإنشاء صفحات محارف مختلفة منها صفحة محارف DOS العربي، وصفحة محارف صخر إلا أن أكثرها انتشاراً هي

صفحة محارف windows العربية ورمزها windows-1256 وهنالك أيضاً صفحة محارف ISO العربية، وبعد ظهور الإنترنت أصبح أمر صفحات المحارف المختلفة مربكاً جداً، وسبب العديد من المشاكل، فمثلاً إذا فتحت صفحة ما مكتوبة على أساس صفحة محارف عربية وفتحتها في متصفح صيني فسوف تظهر الرموز الصينية لأن الرقم 23 فرضاً يشير إلى حرف أ العربي في جدول الرموز العربي، ويشير إلى الحرف ! في جدول الرموز الصيني، فتحدث التضاربات، والمشكلة الأكبر هي اختلاف صفحات المحارف للغة الواحدة كما في اللغة العربية، ولحل هذه المشكلة تم عمل هيئة لتوحيد صفحات محارف العالم في صفحة محارف وحيدة وضخمة بحيث تسع جميع الحروف والرموز المستخدمة في العالم، وبالتالي لن تحصل التضاربات لأن لكل حرف رمز مختلف وتسمى صفحة المحارف هذه بصفحة محارف اليونيكود UNICODE.

وكما قلنا إن النظام العشري يعتمد على أساس عشرة أرقام، أما الرقم **الثنائي** فيعتمد على رقمين فقط و هما صفر وواحد 0 1.

وبنفس الطريقة عند الانتهاء من الأرقام نضيف الرقم صفر ونزيد واحد

111 110 101 100 11 10 1 0

نلاحظ أن النظام يتكون من رقمين فقط، صفر وواحد نبدأ بالصفر ثم واحد ثم نضيف واحد مكان الصفر ونضيف واحد بجوار الرقم عند انتهاء الأرقام (في حالتنا انتهاء الأرقام هما صفر وواحد)

الرقم التالي 101100 في النظام الثنائي لا يلفظ بمائة وعشرة آلاف ومائة! بل يلفظ كالتالي: واحد صفر واحد واحد صفر صفر

والقاعدة هي: عندما نصل إلى رقم صاحب الترتيب الذي يساوي أساس **نظام العد** وفي حالتنا هنا النظام **الثنائي** مثلاً نقوم بوضع الرقم صفر في الخانة الحالية ونضيف الرقم واحد في الجهة التالية له.

يطلق على النظام الثنائي اسم نظام الأساس أثنين (2) ويشار إليه بالأساس (2) لأنه يعتمد على رمزين اثنين فقط هما (1،0) ومراتب الخانات في النظام الثنائي من اليمين إلى اليسار تمثل قوى العدد (2)

تمثيل الأعداد من 1 إلى 16 في النظام الثنائي

النظام العشري	النظام الثنائي	النظام العشري	النظام الثنائي
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	10	1010
3	0011	11	1011
4	0100	12	1100
5	0101	13	1101
6	0110	14	1110
7	0111	15	1111

التحويل من الثنائي إلى العشري

كما ذكرنا النظام الثنائي هو عددّ أساسي، في هذا القسم سنرى كيف نحوّل أعداد ثنائية إلى عشرية سنبدأ بالعدد الثنائي 10011101.

كلّ موقع ثنائي، يبدأ من اليمين ويعمل إلى اليسار، ونأخذ مصفوفة الأضعاف التالية:

128	64	32	16	8	4	2	1

نرتب مصفوفة النظام الثنائي:

128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	1	1	0	1

الآن سوف نهمل الأرقام العشرية التي باللون الأحمر كون القيم التي تمثلها هي 0.

الخطوة التالية وهي حساب الرقم العشري المكافئ للمصفوفة الثنائية.

بعد إهمال القيم التي تمثل الرقم 0. نجد أن 10011101 =

128+16+8+4+1=157

لنأخذ مثالاً آخر وهو تحويل العدد الثنائي 00101011 إلى رقم عشري مكافئ:

128	64	32	16	8	4	2	1
0	0	1	0	1	0	1	1

32+8+2+1=43

لقد حوّلنا الآن عددي ثنائي بنجاح إلى عشري

مثال آخر: 11001101

كلّ موقع ثنائي، يبدأ من اليمين ويعمل إلى اليسار، ونأخذ مصفوفة الأضعاف التالية:

128	64	32	16	8	4	2	1

نرتب مصفوفة النظام الثنائي:

128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	0	0	1	1	0	1

الآن سوف نهمل الأرقام العشرية التي باللون الأحمر كون القيم التي تمثلها هي 0.

الخطوة التالية وهي حساب الرقم العشري المكافئ للمصفوفة الثنائية.

بعد إهمال القيم التي تمثل الرقم 0. نجد أن 11001101 =

128+64+8+4+1=205

لقد حوّلنا الآن عددي ثنائي آخر بنجاح إلى عشري

التحويل من العشري إلى الثنائي

العدد العشري 101 يمكن أن يحوّل إلى ثنائي بالطريقة التالية:

128 64 32 16 8 4 2 1

الآن نسأل أنفسنا هل الرقم 101 أكبر من 128 والجواب طبعاً لا لذا نضع رقم 0 تحت القيمة 128 على الشكل التالي:

128	64	32	16	8	4	2	1
0							

والآن نكرر نفس السؤال هل الرقم 101 أكبر من 64 والجواب طبعاً نعم لذا نضع رقم 1 تحت القيمة 64 على الشكل التالي:

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1						

والآن نحسب بطريقة مختلفة القيمة المقابلة لـ 32 وذلك بطرح القيمة التي قبلها من 101 أي نطرح 64 من 101 أي 101−64=37 وهنا نجد أن 37 هي أكبر من الـ 32 لذلك نضع رقم 1 تحت الرقم 32:

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	1					

نطرح الآن 32 من 37 أي 37 − 32 = 5 وهي أصغر من 16 لذا نضع 0.

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	1	0				

نطرح الآن 16 من 5 وبما أننا لا نقبل القيم السالبة لا نجري عملية الطرح بل نقارن بين الناتج السابق وهو 5 مع القيمة 16 أيهما أكبر وبما أن 16 أكبر من الـ 5 نضع 0.

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	1	0	0			

نفس الحالة الآن تتكرر مع القيمة 8 وبما أن 4 أصغر من 5 نضع 1.

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	1	0	0	1		

نطرح الآن 4 من الناتج السابق وهو 5 (والذي لم يتم طرحه مسبقاً كونه أصغر من الأرقام 16 و 8 ونذكر هنا أنه كان ناتج طرح 32 من 37) وهنا نجد أن 5 – 4 = 1 وهذا الناتج أصغر من القيمة 2 لذا نضع 0 تحتها.

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	1	0	0	1	0	

وعدنا إلى نفس الحالة فلا يمكن طرح 2 من 1 ولكن بما أن 1 الناتج يساوي 1 الموجود في السلسلة (**التساوي بين أي رقمين يؤدي إلى القيمة 1**) لذا نضع 1.

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	1	0	0	1	0	1

إذا قيمة الرقم العشري 101 في الصيغة الثنائية هي 01100101.

وهذا الرقم بالطبع يدل على أحد الرموز المستعملة في الحاسب والبالغة 256 رمز

تحويل عدد عشري إلى ثنائي بطريقة الباقي

تحويل العدد العشري 15 إلى ثنائي بطريقة الباقي:

العدد	15	7	3	1	0
المقسوم عليه	2	2	2	2	
الباقي	1	1	1	1	

الناتج هو : 1111

مثال: تحويل العدد العشري 25 إلى ثنائي

العدد	25	12	6	3	1	0
المقسوم عليه	2	2	2	2	2	
الباقي	1	0	0	1	1	

الناتج هو : 11001

العمليات الحسابية في النظام الثنائي

العمليات الحسابية في النظام الثنائي ضرورية في كل أجهزة الحاسب وأنواع أخرى عديدة من النظم الرقمية. وسنكتفي هنا بشرح القواعد الأساسية لعمليتي الجمع والطرح فقط.

الجمع الثنائي:

لإجراء عملية الجمع في النظام الثنائي هناك أربعة قواعد أساسية لجمع الخانات الثنائية وهي:

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 0$
$1 + 1 = 0$ carry $1 \Rightarrow 10$

لا أعتقد أن القواعد الثلاثة الأولى تحتاج إلى المزيد من الإيضاح، أما القاعدة الرابعة تقول أن في حالة جمع 10=1+1 وهي تعني رقم (2) بالعشري والواحد (1) هو المجموع الواجب ترحيله إلى العامود التالي كما في الجمع العشري العادي ولتوضيح عملية الجمع الثنائي نأخذ المثالين التاليين:

مثال:

اجمع الرقمين الثنائيين 110, 011

لاحظ العمليات من خلال الشكل:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

وبتطبيق التحويل من إلى عشري يصبح الناتج:

$$\begin{array}{cc} & 6 \\ + & 3 \\ \hline & 9 \end{array}$$

مثال آخر:

اجمع الرقمين 100, 011

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 4 \\ + & 3 \\ \hline & 7 \end{array}$$

الطرح الثنائي

هناك عدة طرق لإجراء عملية الطرح أهمها وأبسطها الطريقة المباشرة أو ما يطلق عليها الطريقة الحسابية.

لإجراء الطرح بالطريقة المباشرة الحسابية يجب معرفة القواعد الأساسية لهذه العملية مع ملاحظة أن المقدار المطروح منه على اليسار والمقدار المطروح على اليمين:

0 - 0 = 0
1 - 0 = 1
1 - 1 = 0
0 - 1 = 1 والباقي 1

ويمكن تلخيص عملية الطرح في الطريقة المباشرة كما يلي:

- رتب الأرقام تحت بعضها حيث تظهر في صورة أعمدة أو خانات واضحة.
- ابدأ من الخانة الأولى على اليمين متجهاً إلى اليسار.

مثال: اطرح المقدار 101 من المقدار 011

عندما استلفنا 1 أصبحت هذه الخانة 0 ←	0			
	~~1~~	0	1	المطروح منه
استلفنا 1 من العمود الذي يليه فأصبحت الخانة تحتوي على 10 وبطرح 1 منها يصبح الناتج 1	− 0	1	1	المطروح
	0	1	0	

النظام الثماني للأعداد

يطلق على النظام الثماني أسم نظام الأساس ثمانية (8) ويشار إليه بالأساس (8) لأنه يحتوي على ثمانية رموز وهي (0،1،2،3،4،5،6،7) ونتيجة لأن التعامل مع الأعداد الثنائية الطويلة يجعل الإنسان عرضة للخطأ في التعامل معها من ناحية الكتابة والنسيان، لذا يتم اللجوء إلى استخدام النظام الثماني في التعامل مع الأعداد الثنائية بصورة غير مباشرة ومن ثم يتم التحويل بين النظامين الثنائي والثماني.

التحويل من النظام الثماني إلى العشري:

مراتب الخانات في النظام الثماني مرتبة من أقصى اليمين إلى اليسار وتمثل قوى العدد (8) أي (8^0 8^1 8^2 8^3...) وهكذا، وبالتالي فإن مراتب الخانات أو أوزانها العددية هي (1 8 64 512....) وهكذا، ولتمييز العدد الثماني عن غيره من الأعداد يكتب الأساس في اسفل العدد الثماني على اليسار، فعلى سبيل المثال لتحويل العدد الثماني $(2276)_8$ إلى عدد في النظام العشري فإننا نقوم بالتحويل كما يلي:

الأوزان: 8^3 8^2 8^1 8^0

العدد الثماني: 2 2 7 5

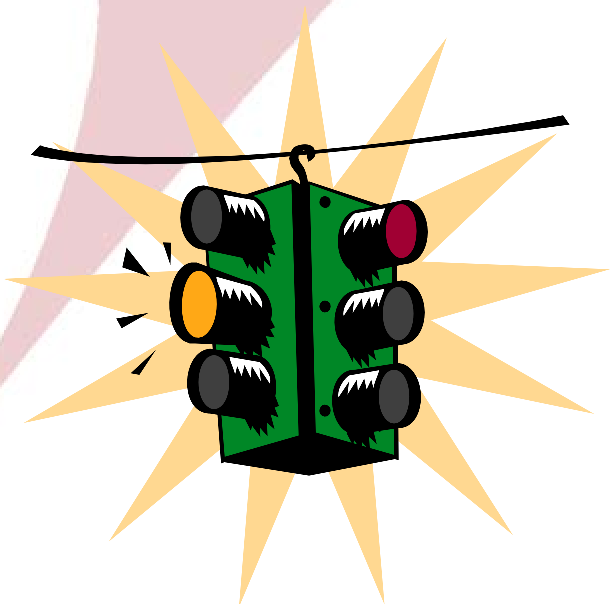
$$(2275)_8 = (2 \text{ x } 8^3) + (2\text{x}8^2) + (7\text{x}8^1) + (5 \text{ x } 8^0)$$
$$= (2\text{x}512) + (2\text{x}64) + (7\text{x}8) + (5\text{x}1)$$
$$= 1024 + 128 + 64 + 6 = (1222)_{10}$$

مثال آخر: حول العدد الثماني $(4691)_8$ إلى عدد في النظام العشري:

الأوزان: $8^3 \quad 8^2 \quad 8^1 \quad 8^0$

العدد الثماني: **4 6 9 1**

$$
\begin{aligned}
(4691)_8 &= (4 \times 8^3) + (6 \times 8^2) + (9 \times 8^1) + (1 \times 8^0) \\
&= (4 \times 512) + (6 \times 64) + (9 \times 8) + (1 \times 1) \\
&= 2048 + 384 + 72 + 1 = (2505)_{10}
\end{aligned}
$$



العمليات الحسابية في النظام الثماني

سنناقش هنا عملية الجمع وعملية الطرح بالطريقة المباشرة فقط.

الجمع الثمانـي:

إذا جمعنا عدداً من الأرقام العشرية الأساسية . أي التي بين (0,9) وكان حاصل الجمع لا يزيد عن(9) فإنـه يعبر بـه تماماً، أما إذا حاصل الجمع عن (9) بواحد فقط فإنـه يعبـر عنـه بـالرقم (10) الذي هو بدايـة التكرار للرموز العشرية الأساسية. وكذلك الحال بالنسبة للنظام الثنائي فإنه لو زاد حاصل الجمع عن الرموز الأساسية والتي هي (0,1) بواحد فقط عبر عنه بالنظام الثنائي(10) الذي هو بداية التكرار للرموز الأساسية للنظام الثنائي أيضا كما تم شرحه سابقاً. وعلى ذلك فإنه يمكن تطبيق قواعد الجمع في النظام العشري على الأعداد في النظام الثماني مادام حاصل الجمع لا يزيد على الرقم (7) الذي هو آخر رمز في النظام الثماني . أما إذا زاد حاصل الجمع عن (7) بواحد فقط عبر عنه بالرقم (10) الثماني، الذي هو بداية التكرار الأول للأرقام الثمانية ويأتي بعـده (11,12.13,14,15,16,17) ثـم يـبدأ التكـرار الثـاني (20,21,22,........,27) ثـم التكرار الثالث (30,31,........,37) وهكذا. والجدول أدناه يبين عملية الجمع في النظام الثماني مع ملاحظة أن الجمع يتم بين رقم واحد رأسي مع رقم واحد أفقي وأن حاصل الجمع في نقطة التقاء الخط الرأسي والذي نتصور أنه نازل من الرقم الرأسي مع الخط الأفقي والذي نتصور أنـه خارج من الرقم الأفقي. ويمكن تلخيص عملية الجمع فـي النظام الثماني كالآتي:

- أنه يمكننا إجراء عملية الجمع للأرقام الثمانية كما في النظام العشري تماماً مادام حاصل الجمع لم يزد على رقم (7).

- إذا زاد حاصل الجمع عن رقم (7) فإننا نضيف إلى حاصل الجمع العشري (2) لنحصل على مقابله الثماني، حيث أن الرقم التالي للرقم(7) في النظام العشري هو (8) أما الرقم (7) الثماني فإن الرقم التالي له هو (10) الثماني أي أننا لو جمعنا (2) على حاصل الجمع العشري ينتج حاصل الجمع الثماني المقابل (لاحظ أن هذه الطريقة لا تستخدم في عملية التحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني إنما تستخدم فقط في عملية الجمع).

7	6	5	4	3	2	1	0	+
7	6	5	4	3	2	1	0	0
10	7	6	5	4	3	2	1	1
11	10	7	6	5	4	3	2	2
12	11	10	7	6	5	4	3	3
13	12	11	10	7	6	5	4	4
14	13	12	11	10	7	6	5	5
15	14	13	12	11	10	7	6	6
16	15	14	13	12	11	10	7	7

أمثلة عملية:

1 . اجمع العددين الثمانيين (32) و (23)

نرتب العددين رأسياً:

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

نكتب الناتج كما هو 55 لأنه لم نقابل أي قيمتين مجموعهما أكبر من 7

2 . اجمع العددين الثنائيين (55) و (64)

$$\begin{array}{r} 5\ 5 \\ +\ 6\ 4 \\ \hline 1\ 4\ 1 \end{array}$$

القيم المجموعة تزيد عن قيمتها عن 7 لذا نقوم بإضافة 2 إلى الناتج وننشئ خانة جديدة.

ويمكن متابعة النتائج من الجدول.

7	6	5	4	3	2	1	0	+
7	6	5	4	3	2	1	0	0
10	7	6	5	4	3	2	1	1
11	10	7	6	5	4	3	2	2
12	11	10	7	6	5	4	3	3
13	12	11	10	7	6	5	4	4
14	13	12	11	10	7	6	5	5
15	14	13	12	11	10	7	6	6
16	15	14	13	12	11	10	7	7

الطرح في النظام الثماني:

يمكن تلخيص عملية الطرح في النظام الثماني كالتالي:

- إذا كان المطروح منه أكبر من المطروح أو يساويه فيتم كطرح الأرقام العشرية تماماً.
- أما إذا كان المطروح منه أصغر من المطروح فيتم استلاف (1) من الخانة التالية . هذا الواحد يعبر عنه بثمانية (8) تضاف إلى الخانة التي يراد الطرح منها في العدد المطروح منه ثم يتم الطرح كالمعتاد في النظام العشري.

أمثلة:

1 . اطرح الرقمين (776) – (243)

نرتب بشكل عامودي...

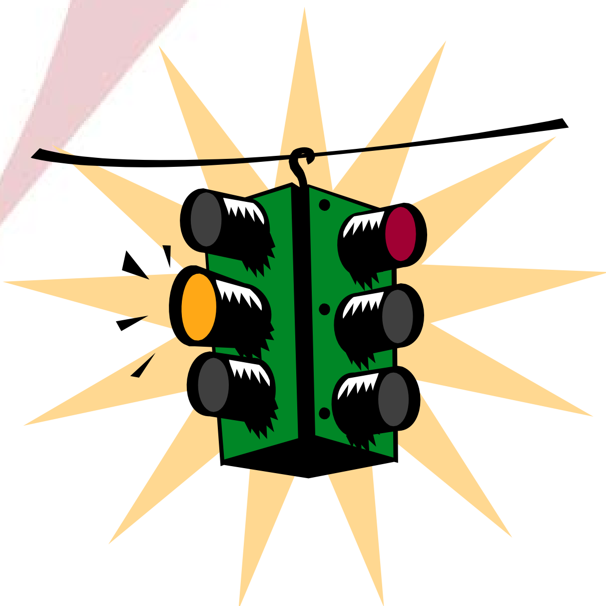
$$\begin{array}{rrrr} & 7 & 7 & 6 \\ - & 2 & 4 & 3 \\ \hline & 5 & 3 & 3 \end{array}$$

تمت العملية بشكل طبيعي لأن المطروح أصغر من المطروح منه في كل المراتب.

2 . اطرح الرقمين (742) – (583)

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 3 & 1 \\ & \cancel{7} & \cancel{4} & 2 \\ - & 5 & 8 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 7 \end{array}$$

نلاحظ هنا في العمود الأول عند طرح (3) من (2) فإن المطروح أكبر من المطروح منه ولذلك استلفنا(1) من الخانة التالية وهذا الواحد بثمانية تجمع على المطروح منه، ثم تمت عملية الطرح كما في النظام العشري وتكررت هذه العملية أيضا عند طرح (8) من (4) في العمود الثاني.



النظام الستعشري للأعداد

كما سبق وذكرنا فهي تتكون من أرقام (0 إلى 9) وهذه الأرقام عددها 10 (لأن الـ 0 يعتبر عدد) وحتى نكمل السلسلة إلى 16 علينا أن نلجأ إلى الأحرف فنأخذ 6 أحرف (من A إلى F). ومن هذه الأرقام والأحرف تتكون اللغة الستعشرية.

يطلق على النظام السداسي عشري أسم نظام الأساس ستة عشر(16) ويشار إليه بالأساس (16) لأنه يعتمد ستة عشر رمزاً وهي:

(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F) مع ملاحظة أن الحروف

(A,B,C,D,E,F) تكافيء الأرقام العشرية (10,11,12,13,14,15) على الترتيب.

التحويل من السداسي عشري إلى العشري:

مثال: يمكننا تحويل الرقم الستعشري F2 إلى عشري من خلال تقسيمه إلى جزأين هما 2 و F ونقوم بحساب كل جزء بشكل منفصل وبنفس الترتيب على النحو التالي:

كما نعلم فإن 15 = F لذا نحسب قيمة 15 حسب الأمثلة السابقة:

8	4	2	1
1	1	1	1

إذاً F = 1111

نحسب الآن قيمة 2.

8	4	2	1
0	0	1	0

إذاً 0010 = 2

F2 = 11110010

نقوم الآن بحساب الرقم العشري المكافئ:

128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	1	1	0	0	1	0

= 128 + 64 + 32 + 16 + 2 = 242

العمليات الحسابية في النظام الستعشري

سنقتصر هنا على دراسة عمليتي الجمع والطرح بالطريقة المباشرة.

الجمع في النظام السداسي عشري:

حيث إن الرموز في النظام السداسي عشري تقع بين (0,F) فإن التكرار الأول بعد (F) هو(10)، وكما سبق وبينا أن هذا العدد (10) هو العدد التكراري لأنظمة الأعداد العشرية والثنائية والثمانية أو بمعنى أشمل أن هذا العدد هو العدد التكراري الأول لأي نظام عددي. وبالتالي فإن قواعد الجمع للنظام السداسي عشري تخضع لنفس قواعد الجمع للنظام العشري مع ملاحظة أن حاصل الجمع الزائد عن $(9)_{16}$ بواحد صحيح يعبر عنه بحرف $(A)_{16}$ والزائد عن $(9)_{16}$ باثنين يعبر عنه بحرف $(B)_{16}$ وهكذا حتى $(F)_{16}$.

أما لو جمعنا واحداً صحيحاً على $(F)_{16}$ فأن الناتج يكون $(10)_{16}$ حيث الصفر هو المجموع ويرحل الواحد إلى الخانة التالية وهكذا.

والجدول أدناه يوضح نتائج عملية الجمع بين كل رموز بين كل رموز النظام السداسي عشري، مع ملاحظة أن الصف الأول الأفقي والعمود الأول الرأسي يوضحان رموز هذا النظام الذي يجري فيه الجمع أما بقية الخانات فتوضح نتيجة الجمع للرمز الأفقي مع الرمز الرأسي.

F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	+
F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1
11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	2
12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	3
13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	4
14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	5
15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	6
16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	7
17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	8
18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	9
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	A
1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	B
1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	C
1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	D
1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	E
1E	1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	F

مثال:

أوجد ناتج جمع العددين $(36AB2)_{16} + (2A865)_{16}$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 6 & A & B & 2 \\ 2 & A & 8 & 6 & 5 \\ \hline \end{array}$$

بالعودة إلى الجدول نجد:

F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	+
F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1
11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	2
12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	3
13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	4
14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	5
15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	6
16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	7
17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	8
18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	9
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	A
1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	B
1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	C
1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	D
1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	E
1E	1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	F

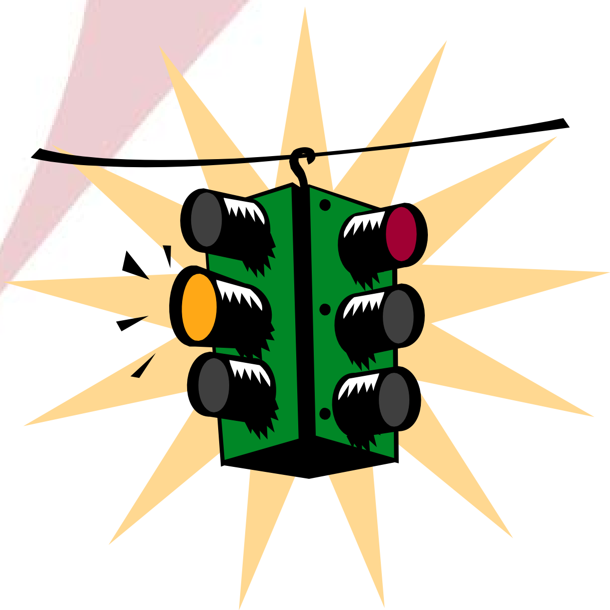
يمكننا الآن من الجدول أن نجد أن ناتج الجمع هو: $(61347)_{16}$

الطرح في النظام السداسي عشري:

يتم الطرح في النظام السداسي عشري بالطريقة المباشرة كالآتي:

- إذا كان المطروح منه أكبر من المطروح فتتم كعملية الطرح في الأعداد العشرية مع تحويل الحروف إلى ما يقابلها من أرقام عند الطرح وتحويل باقي الطرح إلى حروف إذا لزم الأمر.
- إذا كان المطروح منه أصغر فيتم استلاف (1) من الخانة التالية وهذا الواحد يعبر عنه بستة عشر تجمع إلى الخانة التي يتم الطرح منها في العدد المطروح منه ثم يتم الطرح كما في الخطوة الأولى.

الطريقة بسيطة جداً أرجو منك عزيزي الطالب تطبيق بعض الأمثلة على ذلك.



المتمم الأحادي والثنائي للأعداد الثنائية

إن أهمية المتممين الأحادي والثنائي يكمن في سماحهما لنا في تمثيل الأعداد الثنائية السالبة. والمتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً واستخداماً في أجهزة الحاسب للتعامل مع الأعداد السالبة. وللحصول على المتمم الأحادي لأي عدد ثنائي فإننا ببساطة نقوم بتغيير كل واحد إلى صفر وبالعكس.

العدد الثنائي	$\Leftarrow$	11011010
المتمم الأحادي	$\Leftarrow$	00100101

أما المتمم الثنائي لعدد الثنائي فإنه يمكن إيجاده بطريقتين كما يلي:

الطريقة الأولى: نقوم بإيجاد المتمم الأحادي كما سبق. ثم بعد ذلك نقوم بإضافة العدد (1) إلى المتمم الأحادي الذي حصلنا عليه وبذلك نحصل على المتمم الثنائي أي أن

المتمم الثنائي = المتمم الأحادي +1

ستتوضح لنا هذه الطريقة من خلال المثلب التالي:

أوجد المتمم الثنائي للعد الثنائي 10110011:

الحل:

1 . نوجد المتمم الأحادي فيكون حسب ماسبق = 01001100

2 . لإيجاد المتمم الثنائي للعدد نضيف 1 إلى المتمم الأحادي ليصبح المتمم الثنائي على الشكل: 01001110.

الطريقة الثانية:

نقوم بالنظر للخانة الثنائية ذات القيمة الدنيا (LSB) من أقصى اليمين للعدد الثنائي فإن كانت تساوي صفر نقوم بكتابتها ونستمر في ذلك وبمجرد أن نقابل أول خانة ثنائية تساوي (1) عند ذلك نقوم بكتابة الواحد الذي قابلناه ثم بعد ذلك بقلب الصفر واحد أو الواحد صفر وهكذا إلى أن ننتهي من كتابة العدد (وفي حال قابلنا أول واحد في الخانة الثنائية ذات القيمة الدنيا فإننا نقوم بكتابته ثم نتبع الطريقة السابقة بقلب الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد) ومثال على ذلك، نفترض أننا نريد تحويل العدد الثنائي (10101101) إلى المتمم الثنائي:

العدد الثنائي: 10101101

المتمم الثنائي: 01010011

تمثيل الأعداد ذات الإشارة

إن النظم الرقمية التي تستخدم في الحاسوب يجب أن تكون لها القدرة على التعامل مع الأعداد الموجبة والسالبة على حد سواء ونتيجة لذلك فإن الخانة الثنائية ذات القيمة العليا للعدد والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل إشارة العدد(Sign Bit) وبقية الخانات تمثل قيمة العدد (Magnitude).

وهناك ثلاثة طرق لتمثيل الأعداد ذات الإشارة في النظام الثنائي وهي: إشارة المقدار والمتمم الأحادي والمتمم الثنائي.

نظام إشارة المقدار:

عند تمثيل العدد الثنائي بنظام إشارة المقدار، فإن الخانة الثنائية(Bit) ذات القيمة العليا والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل خانة الإشارة وبقية الخانات تمثل مقدار العدد. حيث أن الخانات التي تمثل مقدار العدد تظل كما هي سواء أكان العد سالباً أم موجباً أما في خانة الإشارة فإنه يتم وضع صفر إذا كان العدد موجباً أو واحد إذا كان العدد سالباً، فمثلاً لتمثيل العدد العشري (+23) بنظام إشارة المقدار فإننا نكتب العدد كالتالي:

00010111

أما العدد 23−

<u>1</u>0010111

نظام المتمم الأحادي:

الأعداد الموجبة في نظام المتمم الأحادي تمثل بنفس الطريقة التي تمت في تمثيل الأعداد الموجبة بنظام إشارة المقدار. أما الأعداد السالبة فيتم الحصول عليها عن طريق إيجاد المتمم الأحادي للعدد الموجب. كما يلي:

العدد العشري 23− يمكن تمثيله عن طريق إيجاد المتمم الأحادي للعدد:

العدد 23+

$\underline{0}\,0010111$

العدد 23−

$\underline{1}\,1101000$

حيث أن الإشارة في كلا العددين تمثلها الخانة الأخيرة ذات القيمة العليا الموجودة في أقصى يسار العددين.

نظام المتمم الثنائي:

كما في نظام المتمم الأحادي فإن الأعداد الموجبة في نظام المتمم الثنائي تمثل بنفس الطريقة كما في نظام إشارة المقدار. أما الأعداد السالبة فتحصل عليها عن طريق إيجاد المتمم الثنائي لعدد الموجب فمثلاً العدد العشري(23−) يمكن تمثيله عن طريق إيجاد المتمم الثنائي للعدد (23+) كما يلي:

العدد 23+

00010111

العدد 23−

11101001

وكما ذكرنا سابقاً فإن نظام المتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً و استخداماً في النظم الحاسوبية.

العمليات الحسابية في الأعداد ذات الإشارة

تعلمنا سابقا كيف يمكن تمثيل الأعداد ذات الإشارة بثلاثة نظم مختلفة، وهنا سوف نتعلم كيف نجري العمليات الحسابية المختلفة على الأعداد ذات الإشارة وسنكتفي هنا بشرح عملية الطرح فقط، ولأن نظام المتمم الثنائي كما أسلفنا هو الأكثر استخداما لتمثيل الأعداد السالبة في أجهزة الحاسب فسوف نكتفي هنا بشرح عملية الطرح باستخدام نظام المتمم الثنائي فقط. ولفهم عملية طرح الأعداد ذات الإشارة باستخدام المتمم الثنائي فإننا سوف نعطي مثال لتوضيح الفكرة:

اطرح المقدار 00001110 من المقدار 11111010 باستخدام المتمم الثنائي للأعداد.

14 – (-16) = 14 + 6 = 20

كما يمكننا ترتيب العددين بالطريقة التقليدية تحت بعضهما البعض:

المقدار المطروح منه (14)	0	0	0	0	1	1	1	0
المتمم الثنائي للمطروح (6)	1	1	1	1	1	0	1	0
الفرق (20)	0	0	0	1	0	1	0	0

بهذا نكون قد كونا فكرة بسيطة عن اللغة الرقمية التي يتعامل بها الحاسب مع البيانات، حيث يقوم بتحويل البيانات إلى لغته الخاصة ليتم حفظها رقمياً ثم يحلل هذه القيم ويعيدها إلى بيانات لإعادة عرضها على الشاشة حين الطلب.

تمارين للحل

1. حول كل من الأعداد العشرية الآتية إلى مكافئاتها الثنائية.

331 . 270 . 110 . 64

2. حول كل من الأعداد الثنائية التالية إلى مكافئاتها العشرية.

1110110 . 1110111 . 01101

3. أوجد حاصل جمع كل من الأعداد الثنائية الآتية.

(0101 + 1111) (111 + 100)

4. أوجد باقي الطرح للأعداد الثنائية الآتية بالطريقة المباشرة.

(00110 . 11101) (01101 . 10101)

5. أوجد المتمم الأحادي لكل من الأعداد الثنائية الآتية.

(10110111) (01011101) (11101101)

6. أوجد المتمم الثنائي لكل من الأعداد الثنائية الآتية.

(11011011) (11101110) (00100110)

7. أكتب العدد الثنائي المكافئ لكل من الأعداد العشرية الآتية في شكل إشارة المقدار بحيث يتكون العدد الثنائي من ثماني خانات(8-bits).

$+93$ -130 $+28$

8. أوجد حاصل جمع الأعداد الثمانية الآتية

$(16)_8 + (18)_8$ $(111)_8 + (212)_8$ $(88)_8 + (93)_8$

9. أوجد حاصل طرح الأعداد الثمانية الآتية

$(13)_8 - (18)_8$ $(121)_8 - (202)_8$ $(477)_8 - (214)_8$

10. أوجد حاصل الجمع للأعداد الستعشرية الآتية

$(61)_{16} + (37)_{16}$ $(1D)_{16} + (12E)_{16}$ $(12EFD)_{16} + (16BD2)_{16}$

مع تمنياتنا بالتوفيق والنجاح