طرائق البحث العلمي ودورها في تدريس الرياضيات

الدكتورة فاطمة الما
باحثة في مديرية المناهج
بوزارة التربية في الجمهورية العربية السورية

مقدمة :

يستخدم عالم الرياضيات وسائل رياضية خاصة وطرائق علمية للبحث اثناء عملية ادراك وصياغة قوانين الطبيعة الرياضية. ويتعرض الطالب اثناء دراسته لمادة الرياضيات لمواقف « المكتشف الاول » للحقائق الرياضية التي يتوصل اليها (بشكل ذاتي أو بمساعدة المدرس). ولذلك فان طرائق البحث العلمي الرياضي تصبح في الوقت نفسه طرائق العمل التعليمي للطلاب. من هنا تنبع ضرورة دراسة الطرائق العلمية الاساسية للبحث الرياضي باعتبارها الطرائق العلمية الاساسية للعمل التعليمي للطلاب، وباعتبارها طرائق علمية اساسية في تدريس الرياضيات. وهذه الطرائق العلمية هي الملاحظة والتجريب والتحليل والتركيب والمقارنة والتعميم والتجريد.

الملاحظة والتجريب في تدريس الرياضيات :

١) الملاحظة :

هي طريقة لاكتشاف الخواص الثابتة للاجسام ولدراسة العلاقات بين الاجسام والظواهر المحيطة بنا عندما ننظر اليها وندرسها في شروطها الطبيعية ومن خلال تلك الروابط الطبيعية بين عناصر الجسم كما هي موجودة فيه بشكل طبيعي. ومن الواضح ان الملاحظة تشمل ايضا الادراك الحسي للجسم ولكن دون ان يكون ادراكا حسيا شاملا له.

فالادراك الحسي للجسم هو عملية الانعكاس المباشر لهذا الجسم في وعي الانسان في نفس الوقت الذي يؤثر فيه هذا الجسم على اعضاء الحس عنده.

اذن هناك فرق ما بين الملاحظة والادراك الحسي الاولي.

مثال توضيحي : ان ملاحظة سريعة للكتب المعروضة في المكتبة توحي لنا مباشرة ان الكتاب له شكل مستطيل أو مربع. ولكن هذا ليس كل شيء عن الجسم ــ الكتاب ــ فما

لاحظناه لا يصف الكتاب تماما. أما عندما نلمس الكتاب ونتفحصه في جميع وجوهه ندرك ــ الاحساس ــ ان للكتاب ــ طولا وعرضا وارتفاعا ــ ان له حجما.

ويمكن تثبيت نتائج الملاحظة في الذاكرة بعد ان نثبتها بالكلمات الشفهية أو الكتابية.

٢) التجربة :

وتفهم ــ عادة ــ بانها طريقة دراسة الاجسام أو الظواهر بواسطة تدخلنا في حالاتها ونموها الطبيعي وذلك بان نخطط للتجربة : أ) باصطناع شروط نحيط بها تلك الاجسام أو الظواهر ــ ب) بتوزيعها الى اجزاء بشكل مصطنع (غير طبيعي) ــ ج) بوضع الجسم في مساقه الطبيعي مع اجسام وظواهر اخرى ــ د) بتثبيت نتائج التجربة.

ومن الواضح ان الملاحظة والتجربة مرتبطتان، اذ ان التجربة التي تتناول جسما أو ظاهرة معينة يكون عمادها ملاحظة ذلك الجسم أو تلك الظاهرة من حيث وضعها وتغيراتها وتطوراتها في تلك الظروف والشروط الاصطناعية التي ندرسها فيها.

تشغل هذه الطرائق ــ الملاحظة والتجريب ــ مكانة اساسية في العلوم التجريبية (الفيزيائية والكيميائية ...) اما الرياضيات فهي ليست علما تجريبيا بصورة عامة. فاذا ما تبين للرياضي ان احدى الخواص أو الصفات لجسم أو موضع ما صحيحة فقط في حالة جزئية ــ خاصة ــ فانه لن يعتبرها صفة أو خاصية عامة لهذا الجسم أو الموضوع، ولن يثبتها كقاعدة من قواعد الرياضيات، ولذلك فان الملاحظة والتجريب تدعوان لاستعراض بعض الخواص الرياضية للجسم المدروس أو استعراض الجسم نفسه. وتدعوان ايضا للتحقق من صحة أو عدم صحة الخواص المدروسة. في هذا المعنى بالذات تكتسب الملاحظة والتجريب الاهمية الكبرى في تعليم الرياضيات.

فالملاحظة يمكن ان تلعب دورا اساسيا في التعليم في رياض الاطفال حيث تعرض ــ مثلا ــ الاجسام التي تحمل البذور الاولى للمفاهيم الهندسية، تلك المفاهيم التي نثبتها بالملاحظة من خلال الالعاب والقصص، حيث يوجه الاطفال الى التجارب الاولى المعبّرة عن العلاقات والصيغ (لها الشكل نفسه لها اللون نفسه، اكبر من، اكثر من،... الاحتواء ... الكل،... الجزء، التصنيف ...). وفي المرحلة الابتدائية يمكن ان تأخذ الملاحظة والتجربة انماطا من الانشطة الموضحة في الرسم المرافق اذ يقرن التلميذ كل تجمع من المربعات الواحدة بعدد دال على المساحة أو المحيط أو يصنف أو يوازن أو يستخدم لوحة المسامير (شكل ٤) مع الخيوط الملونة لتكوين اشكال هندسية (مثلثات، مربعات ...) ثم موازنة محيطاتها أو مساحاتها، أو يعمد الى تصنيفها ... وهناك امثلة كثيرة تتناول الاعداد الاولية، الاعداد الفردية أو الزوجية ... وفي هذه الامثلة مجال واسع لتنمية الملاحظة والتجربة لدى الطفل في السنوات الاولى من المرحلة الابتدائية.

وهكذا فرغم ان الملاحظة والتجربة ليست من الطرائق الاساسية في الرياضيات الا انها تلعب دورا هاما جدا في تدريسها، ومع ذلك فيجب ان ندرك ان نتائج الملاحظة والتجربة لا يمكن الاخذ بها على انها قاعدة ثابتة لبعض الحقائق الرياضية مع انها غالبا ما تساهم في الاشارة الى وجود هذه الحقائق.

المقارنة في تدريس الرياضيات :

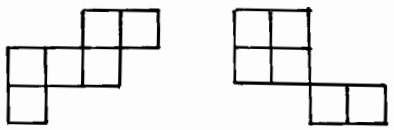
١) المقارنة :

هي التوصل فكريا الى أوجه الشبه والاختلاف ــ الفروق ــ بين الاجسام المدروسة. والمقولة التالية توضح الدور الكبير للمقارنة في عملية الادراك : « كل شيء يمكن ادراكه بالمقارنة ».

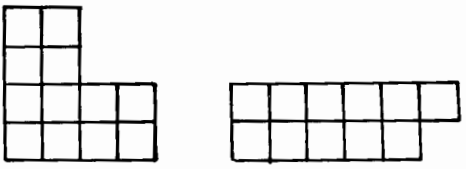
تستخدم المقارنة بشكل واسع في الرياضيات ليس فقط من اجل دراسة الخواص الرياضية للاجسام، ولكن للتوصل ايضا الى هذه الخواص. ولدى استخدامنا طريقة المقارنة في دراسة الرياضيات أو تدريسها لا بدّ ان نأخذ بعين الاعتبار المباديء الاساسية التالية للمقارنة : أ) يمكن ان تتم المقارنة فقط على تلك الاجسام التي يوجد ارتباطا بينها، أي انه يجب ان يكون للمقارنة معنى واضح. مثلا : يمكن الحديث عن مقارنة بين خواص تابعين أو الحديث عن مقارنة مقادير جبرية متشابهة، بينما لا يوجد أي معنى لمقارنة محيط المثلث ــ مثلا ــ مع كتلة جسم. ب) يجب ان تسبق المقارنة مرحلة تخطيط لها، حيث نحدد في هذا المخطط وبدقة كل الصفات التي سنقوم بمقارنتها. أي يجب ان نحدد ماذا نريد ان نكشف بنتيجة المقارنة. فاذا اردنا الكشف عن العلاقة بين مساحات مضلعات مختلفة فنحن نقارن المساحات، واذا اردنا الكشف عن العلاقة بين اطوال المحيطات فنحن نقارن اطوال المحيطات. ج) يجب ان تكون المقارنة بين خواص محددة للاجسام أو مواضيع رياضية كاملة. أي يجب ان نقارن جميع الخواص لكي نتوصل الى صياغة نتيجة صحيحة.

المربي الكبير اوشنسكي يؤكد « ان المقارنة يجب ان تكون الوسيلة الاساسية للتعلم » وهذه الفكرة صحيحة ايضا من اجل تعليم الرياضيات.

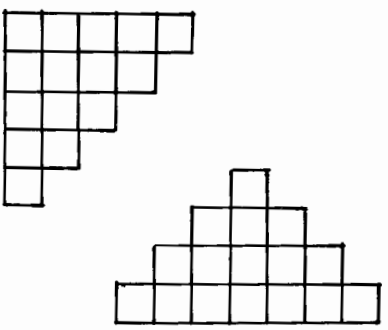
مثلا : لاعطاء مفهوم المتتاليات الحسابية نطلب من الطلاب مقارنة عدد من المتتاليات والتوصل بالتالي الى المتتاليات التي لها نفس الخواص ثم استنباط طريقة كتابتها بالمقارنة ــ أيضا ــ مع بعضها، وبعد ذلك نتوصل الى صياغة الخواص العامة لها ثم تسميتها.



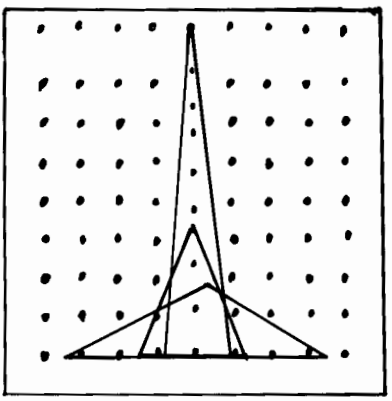
رسم ١



رسم ٢



رسم ٣



رسم ٤

التحليل والتركيب في تدريس الرياضيات :

١) وصف للتحليل والتركيب :

ان التحليل والتركيب كطرق للبحث العلمي تلعب دورا هاما في الابحاث الرياضية. ولا يقل دور التحليل والتركيب اهمية في تدريس الرياضيات باشكال مختلفة ومتعددة، فنحن نستخدمها في حل بعض المسائل وفي برهان بعض النظريات وفي دراسة خواص المفاهيم الرياضية المختلفة وغيرها.

ولا يمكن فصل التحليل والتركيب ــ عمليا ــ بعضهما عن بعض فهما مترافقان دوما وكل منهما يتمم الاخر مؤلفين بذلك الطرق التحليلية التركيبية للبحث العلمي والطرائق التحليلية التركيبية في تدريس الرياضيات. ففي الامكان ــ عند حل مسألة معقدة ــ تجزئة هذه المسألة

الى سلسلة من المسائل الجزئية البسيطة باستخدام التحليل. وبعد ذلك نستخدم طريقة التركيب لحل المسائل الجزئية البسيطة لنصل منها الى حل كامل للمسألة الاصلية المعقدة.

والفهم الاولي للتحليل هو انه طريقة التفكير للوصول من الكل الى اجزاء هذا الكل. اما التركيب فهو طريقة التفكير للوصول من الاجزاء الى الكل.

ويفهم التحليل ايضا على انه منهج للتفكير يمكن بواسطته الانتقال الى المسببات انطلاقا من النتائج التي ولدتها هذه المسببات. أما التركيب فهو منهج للتفكير نتوصل فيه من الاسباب الى النتائج. وفي كتاب « المنطق » لديكارت (١٥٩٦ ــ ١٦٥٠ م) بحث دقيق لهذا الفهم للتحليل. فديكارت يستعرض المثال التالي في كتابه ليتوصل بنا الى جوهر هذه الطرائق. يقول ديكارت « هل أمت بصلة القرابة للملك كارل العظيم ؟؟ للاجابة على هذا السؤال يمكن ان ألجاء الى طريقتين : الطريقة الاولى وهي تتبع شجرة العائلة من عندي الى الملك كارل العظيم. والطريقة الثانية وهي تتبع شجرة العائلة من الماضي أي من عند الملك كارل العظيم للوصول إلي. فاذا تبين اننا نقع على شجرة عائلة واحدة فنحن اقرباء ».

ان الطريقة الاولى في الحل توضح ماذا نعني بالتحليل، والطريقة الثانية توضح ماذا نعني بالتركيب.

وتفهم الطرق التحليلية ايضا كطرق البحث الرياضي التي تدرس خواص الاجسام بشكل كمي ويعتمد في ذلك على مفاهيم الاعداد والقياس. أما التركيب (أو الطرق التركيبية) فهي طرق البحث الرياضي التي تدرس خواص الاجسام من الناحية النوعية.

٢) التحليل والتركيب كصفة للتفكير (من وجهة نظر علم النفس) :

تحدثنا عن التحليل والتركيب كطرق للبحث العلمي ــ وبصورة خاصة كطرق لدراسة المواضيع التعليمية. ولكن التحليل والتركيب يظهران ــ أيضا ــ كمشكل خاص لعملية سير التفكير، أو كصفة هامة للتفكير ــ من وجهة نظر علم النفس.

فعملية التفكير ــ حسب وجهة نظر علم النفس : « هي قبل كل شيء مجموعة عمليات تحليلية، ثم عمليات تركيبية لما يظهر بنتيجة التحليل، وبعد ذلك عمليات تجريد وتعميم هي نتائج لعمليات التحليل والتركيب ».

فعلماء النفس يؤكدون ان التسلسل الذي تنتظم وفقه هذه العمليات (التحليل والتركيب) في العلاقات المتبادلة بينها تؤلف ايضا القانون الاساسي لعملية التفكير. ونتائج الابحاث الكثيرة لعلم النفس اظهرت ان التحليل يبدو ــ عادة ــ في شكلين مختلفين : الشكل الاول وندعوه التحليل من طراز « المصفاة » أو « المرشح » والشكل الثاني وندعوه التحليل من خلال التركيب.

لنوضح باختصار هذين الشكلين من اشكال التحليل.

أ) التحليل من طراز « المصفاة » أو « المرشح » :

أحيانا يتصرف الانسان، الذي يقوم بحل مسألة، دون أي نظام واضح (مرئي) للعمل. فهو في هذه الحالة يبحث ــ ببساطة ــ طرقا مختلفة لحل المسألة المعطاة بجهد مشوش وذلك بمحاولته استخدام طريقة ما للحل ثم طريقة اخرى مبعدا تلك المحاولة التي ثبت عدم صحتها، للوصول الى الجواب الصحيح.

ان مثل هذه المحاولات للوصول الى الحل هي شكل متميز من اشكال التحليل. وبعبارة اخرى : ان أي محاولة للحل ــ حتى وان كانت لا تؤدي مباشرة الى النجاح وايجاد الحل الصحيح تأخذ تصورا معينا للطريق الصحيح للوصول الى الحل. وفائدة هذه المحاولات تظهر بوضوح اثناء البحث عن حل الالغاز فقد اثبتت ابحاث علماء النفس ان حل الالغاز يعتمد على التحليل الذي يمكن بواسطته استبعاد صعوبات المسألة الموضوعة بشروط اصطناعية، تلك الصعوبات التي تظهر المسألة بشكلها المعقد.

ب) التحليل من خلال التركيب :

هذا الشكل للتحليل يعتبر الحلقة الاولى لكل الاعمال الفكرية. يقول روبنشتين : « يتخلص هذا الشكل الاساسي للتحليل ــ الذي هو العصب الاساسي لعملية التفكير ــ بما يلي : يخضع الجسم ــ أو الموضوع المدروس ــ في اثناء عملية التفكير لارتباطات جديدة تماما ــ وذلك حسب شروط المسألة ــ ولهذا السبب فان هذا الجسم أو الموضوع يتحول الى نوعيات جديدة تتثبت في مفاهيم جديدة، وهكذا يبدو وكأنه يستنزف كل المحتويات الجديدة من الجسم، ويبدو الجسم وكأنه يتحول في كل مرة الى جانب آخر له وتظهر فيه ــ بالتالي ــ خواص جديدة تماما ».

٣) العلاقة المتبادلة بين التحليل والتركيب والمقارنة في اثناء عملية التفكير :

يصوغ علماء النفس مفهوم التركيب كما يلي : « ان كل اشكال التناسب والمقارنة وكل الروابط القائمة بين العناصر المختلفة هي تركيب » فالتركيب يتحول اثناء عملية التفكير ــ وبشكل مستمر ــ الى تحليل، والعكس أيضا، أي ان التحليل يتحول بشكل مستمر اثناء عملية التفكير الى تركيب وبصورة عامة لا يوجد في الوعي طريقان منفصلان ندعو احدهما التركيب وندعو الآخر التحليل، بل توجد وحدة ما بين التحليل والتركيب، ووحدتهما هذه تظهر بوضوح بالمقارنة. فالمقارنة يمكن وصفها بانها ذلك التحليل الذي يتم بواسطة التركيب ويؤدي بدوره الى تعميم والى تركيب جديد. ذلك ان المقارنة تبدأ بالتناسبات والمقابلات للظواهر، أي ان المقارنة تبدأ بعمليات تركيبية، وبواسطة هذه العمليات التركيبية نجري تحليلا للظواهر التي يمكن المقارنة بينها (أي نقوم باظهار الفروق واوجه الشبه بينها) ثم نوحد ما ينتج عن هذه المقارنة من أوجه الشبه

(أي نقوم بعملية تركيب للظواهر المتشابهة). فالمقارنة اذا هي ذلك الشكل المحدد من الارتباط المتبادل بين التحليل والتركيب والذي يمكن بواسطته تحقيق تعميم تجريبي وتصنيف للظواهر (أو لعناصر الموضوع المدروس).

٤) التحليل والتركيب في تدريس الرياضيات :

يعتبر التحليل والتركيب من اهم طرائق تدريس الرياضيات، على ان يتمكن المدرس اثناء ذلك من تحديد الحالات التي يجب استخدام طريقة التحليل فيها وتلك التي يجب استخدام طريقة التركيب فيها. ولا ننسى اثناء ذلك ان التحليل هو الطريق الى الاكتشاف اما التركيب فهو الطريق الى التحليل وانشاء البرهان. وفيما يلي توضيح لاستخدام الطريقة التحليلية ــ التركيبية في برهان العلاقات :

٤.١ ــ مثال : برهن على صحة المتراجحة : $\frac{ب + حـ}{٢} \geqslant$ ب حـ حيث ب $\geqslant ٠$ ، حـ $\geqslant ٠$. نلاحظ اثناء التدريس ان الطلاب يعجزون عن برهان مثل هذه المتراجحات وما يحدث غالبا هو ان المدرس يتبع الطريقة التركيبية لبرهان العلاقة المطلوبة وذلك بان يبدأ بوضع العلاقة : $(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})^٢ \geqslant$ هذه العلاقة صحيحة ذلك ان ($ب \geqslant ٠$ ، $حـ \geqslant ٠$) دون ان يعرف الطلاب من أين أتى المدرس أو الكتاب بهذه العلاقة ؟ ولماذا استخدم هذه العلاقة بالذات من اجل البرهان على صحة المتراجحة المطلوبة ؟.

ويتابع المدرس برهان العلاقة بالشكل التالي :

$(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})^٢ \geqslant$ (ذلك ان $ب \geqslant ٠$ ، $حـ \geqslant ٠$)

$(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})^٢ \geqslant (ب - ٢\sqrt{ب}\sqrt{حـ}) + حـ$

$ب + حـ \geqslant ٢\sqrt{ب}\sqrt{حـ} \Leftarrow ب + حـ - ٢\sqrt{ب}\sqrt{حـ} \geqslant ٠ \Leftarrow \frac{ب + حـ}{٢} \geqslant \sqrt{ب}\sqrt{حـ}$

وهو المطلوب

ان متابعة المدرس في برهان المتراجحة والوصول الى الجواب الصحيح (أي برهان صحة المتراجحة) يعني ان انطلاق المدرس (أو الكتاب) من هذه العلاقة $[(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})^٢ \geqslant ٠]$ هو خطوة صحيحة، ولكن من أين للطالب ان يعرف أو يجد بمفرده تلك العلاقة الصحيحة التي يجب ان ينطلق منها للوصول الى البرهان ؟ هنا يبدو المدرس وكأنه يتمتع بامكانات خارقة.

ان واجب المدرس يكمن في ضرورة اطلاع التلاميذ على طريقة حصوله على العلاقة : $(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})^٢ \geqslant$. يجب ان يشرح لهم تلك العملية التحليلية التي تمت في ذهنه (وربما على الورق أيضا، وهذا هو ــ على الاغلب ــ ما حصل) لكي يتوصل الى هذه العلاقة. فالمدرس قام بالعملية التحليلية التالية منطلقا من تحليل العلاقة التي يريد برهانها :

$\frac{ب + حـ}{٢} \geqslant \sqrt{ب}\sqrt{حـ} \Leftarrow ب + حـ \geqslant ٢\sqrt{ب}\sqrt{حـ} \Leftarrow ب - ٢\sqrt{ب}\sqrt{حـ} + حـ \geqslant ٠ \Leftarrow (\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})^٢ \geqslant ٠$ وبذلك توصل بالطريقة التحليلية الى العلاقة الصحيحة $(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})^٢ \geqslant ٠$ التي يمكنه ان ينطلق منها لبرهان صحة المتراجحة بالطريقة التركيبية.

لا بدّ للمدرس ــ لدى اجراء البرهان ــ ان يقوم بهذه العمليات كلها ــ التحليلية والتركيبية ــ بصوت عال امام الطلاب لكي يعلمهم طريقة التفكير للوصول الى البرهان، لان الامر ليس مجرد عبقرية خارقة نتمتع بها تمكننا من التوصل الى العلاقة التي يجب ان ننطلق منها للبرهان، انما الامر يتم ــ ببساطة ــ بواسطة عمليات تحليلية واضحة ومقبولة للنتيجة التي نريد برهانها ومن ثم التوصل الى العلاقة التي سوف نبدأ منها لانشاء البرهان.

يتضح مما سبق ان جوهر طريقة التحليل لبرهان موضوعة ما تتلخص في ان المنطلق لاثبات الموضوعة هو الموضوعة نفسها. حيث نصل بواسطة خطوات تحليلية اساسية منطقية الى موضوعة صحيحة ومعروضة، اما جوهر الطريقة التركيبية فهي تتلخص في البحث عن موضوعة صحيحة يمكن تحويلها الى الموضوعة المطلوب برهانها بواسطة خطوات تركيبية صحيحة منطقية.

تتميز الطريقة التركيبية في انها تصف ماذا وكيف نعمل ولكنها لا تفسر اختيارنا تلك الموضوعة بالذات كمنطلق للبرهان ولذلك فان البرهان المعروض للطلاب بهذه الطريقة يبدو ــ غالبا ــ وكأنه طريقة اصطناعية ومبتدعة. وهناك صعوبة اضافية ــ اضافة للصعوبة المتعلقة بخطوات انشاء البرهان بالطريقة التركيبية ــ وهي البحث عن الموضوعة الصحيحة التي يجب الانطلاق منها. اما استخدام الطلاب للطريقة التحليلية في انشاء البرهان فهي ــ على عكس الطريقة التركيبية ــ تجعل الطلاب يعملون بشكل واع وموثوق (فالطالب يعلم من أين يبدأ لانه يبدأ بتحليل النتيجة)، على ان يستخدم في تحليله قواعد الاستنتاج المنطقي بشكل سليم.

تجدر الاشارة الى عدم امكانية البرهان باستخدام طرق النقاش التحليلي فقط. لذلك يفضل في اثناء التطبيق استخدام الطريقتين التحليلية والتركيبية بالتسلسل : أي نستخدم التحليل أولا لنتمكن بسهولة من اكتشاف العلاقة الصحيحة التي يجب الانطلاق منها، ثم نستخدم الطريقة التركيبية لانشاء البرهان المطلوب انطلاقا من العلاقة الصحيحة التي توصلنا اليها بالتحليل. هذه المناقشة الثنائية يمكن التعبير عنها باختصار بواسطة الاشارة $\Longleftrightarrow$ التي تعني $\Longleftarrow$ ثم $\Longrightarrow$ فنكتب باختصار

تحليـــــل

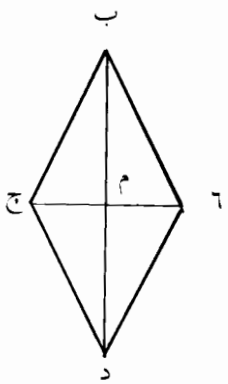
$$\frac{ب + ح}{٢} \geq \sqrt{ب ح} \Leftrightarrow ب + ح \geq ٢\sqrt{ب ح} \Leftrightarrow ب + ح - ٢\sqrt{ب ح} \geq ٠ \Leftrightarrow (\sqrt{ب} - \sqrt{ح})^{٢} \geq ٠$$

تركيـــــب

٢.٤ ــ استخدام طريقة التحليل الصاعد في برهان النظريات :

ان التحليل الصاعد هو احد اشكال برهان العلاقات والنظريات التي تستخدم فيها الطريقة التحليلية. وجوهر هذه الطرائق تظهر في مخطط المناقشة التالي :

حتى تكون القضية ف صحيحة يكفي ان تكون القضية ل صحيحة حيث ل = ف
لنستعرض مخطط المناقشة المنطقية السابقة بمثال :
برهن ان قطري المعين متعامدان.



البرهان :

أ) ننطلق من الطلب : ب د ⊥ هـ حـ
(في الشكل المرافق)
لكي نبرهن ان ب د ⊥ هـ حـ يكفي ان نبرهن ان
حـ م ⊥ ب د [لان : (حـ م ⊥ ب د) = (ب د ⊥ هـ حـ)]

ب) حتى يكون حـ م ⊥ ب د يكفي ان نبرهن ان حـ م هو ارتفاع المثلث ب جـ د
[(لان (حـ م ارتفاع المثلث ب حـ د) = (حـ م ⊥ ب د)]

ج) حتى يكون حـ م ارتفاع في المثلث ب حـ د يكفي ان يكون (أو ان نبرهن) ان المثلث ب جـ د مثلث متساوي الساقين هـ حـ م متوسط فيه.
[لان : (حـ م متوسط في المثلث ب حـ د المتساوي الساقين) ⇐ (حـ م ارتفاع في المثلث ب حـ د]

د) حتى يكون المثلث ب حـ د متساوي الساقين يكفي ان نبرهن ان :
ا حـ ب ا = ا حـ د ا.

هـ) ولكن ا حـ ب ا = ا حـ د ا حسب شروط المسألة (ذلك ان ب حـ د هـ معين)
حـ م متوسط في المثلث ب حـ د (ذلك ان د م = م ب حسب خواص اقطار المعين)
اذن ب د هـ حـ
وهكذا برهنا ان ب د ⊥ هـ حـ بطريقة التحليل الصاعد.

ان المدرس غالبا لا يلجأ الى هذه الطريقة في البرهان وانما يلجأ الى الطريقة التركيبية حيث يبدأ برهانه منطلقا من العلاقة التي انتهت اليها الطريقة التحليلية السابقة. أي انه يبدأ برهانه ــ عادة ــ بدراسة خواص المثلث ب حـ د دون ان يفسر للطلاب سبب هذه البداية ويتابع تركيب خطوات البرهان بشكل منطقي صحيح ولكنها غير مفهومة وغامضة بالنسبة للطلاب. فخواص المثلث ب حـ د كثيرة ولكن كيف للطالب ان يعرف أي هذه الخواص يختار لكي يبني البرهان ؟.

لنعرض خطوات هذا البرهان الذي يقوم به المدرس بالطريقة التركيبية وفي الطرف الايسر نعرض بين قوسين ردود فعل الطلاب المفترض بعد تنفيذ الخطوة المرافقة (الطلاب لن يصرحوا بردود الفعل هذه بصوت عال انما يرددونها لانفسهم فقط وهم يتابعون خطوات البرهان التي يقوم بها المدرس).

برهان المدرّس	تساؤلات الطلاب المفترضة
أ) لننظر الى المثلث ب حـ د ب) نجد فيه : ا حـ ب ا = ا حـ د ا حسب شروط المسألة	(ولماذا أخترنا هذا المثلث بالذات ؟) (وماذا يعني ذلك ؟)
ج) ا م ب ا = ا م د ا حسب خواص المعين	(وماذا يعني ذلك ؟)
د) حـ م متوسط في المثلث ب حـ د	(بماذا تفيدنا هذه النتيجة ؟)
هـ) حـ م ارتفاع في المثلث ب حـ د	(وماذا في ذلك ؟)
و) ا ب د ⊥ احـ م ا = ا ب د ⊥ احـ هـ ا وهو المطلوب.	(آه ... لقد فهمنا الان لماذا وصفنا كل هذه الخطوات. ولكن كيف يمكن ان نعرف نحن من أين تكون البداية ؟)

بمقارنة طريقة التحليل الصاعد والطريقة التركيبية لبرهان هذه النظرية لن نجد صعوبة في التأكد من افضلية استخدام طرائق التحليل الصاعد اثناء تعليم الرياضيات ذلك بان هذه الطرائق تتميز بما يلي :

أ) تؤمّن بحث الطلاب الذاتي الواعي عن طرق لبرهان النظرية.
ب) تساعد على نمو التفكير المنطقي عند الطلاب.
ج) تؤمّن وعي وتوجه هدف العمليات عند كل مرحلة من مراحل البرهان.
د) اضافة لكل ما ذكر فان مخطط هذه الطريقة بسيط جدا ويمكن تلخيصه بما يلي :
ما المطلوب برهانه ؟ وماذا يكفي لذلك ان نبرهن ؟ أو :
ماذا يجب ان نبرهن ؟ وماذا يكفي لذلك ان نبرهن ؟

من الواضح ــ اخيرا ــ ان طرق التحليل الصاعد (ككل طرائق برهان النظريات) يجب عدم اعتبارها طريقة شاملة يمكن (أو يجب) استخدامها دوما في كل البراهين، فهناك نظريات يكون برهانها سهل بهذه الطريقة، وهناك نظريات يكون برهانها اسهل اذا استخدمنا طرقا اخرى في البرهان.

التعميم والتجريد في تدريس الرياضيات :

١) التعميم :

هي العملية الفكرية التي يتم بها اظهار الخواص المتواجدة في مجموعة من المواضيع والتي توحد هذه المواضيع في موضوع واحد. فالتعميم يتم وكأنه تحويل من مجموعة مواضيع تتم عليها الدراسة الى مجموعة اوسع منها وتحويها.

٢) العلاقة بين التعميم والتحليل :

اظهر عالم النفس السوفييتي الشهير دافيدف الاهمية الكبرى للعلاقة بين التعميم والتحليل في نظريات التدريس فقد نظر دافيدف الى التعميم من خلال التحليل وكأنه الطريق الى تكوين الفكر النظري للطلاب. بينما نظر الى التعميم الذي يتم بنتيجة المقارنة كطريق لتكوين الفكر التجريبي. وعملية التعميم بالمقارنة يمكن توضيحها بالعودة الى مثال المتواليات الحسابية. فعندما يحلل الطالب كل متوالية معطاة على حدة ثم يقيم مقارنة بينها، يستطيع ان يبرز الخواص المشتركة لبعض هذه المتواليات. تلك الخواص التي تسمح بعرض بعض المتواليات في صف خاص ــ صف المتواليات الحسابية ــ تسمح بتكوين متواليات محددة.

تبرز الاهمية الكبرى للتعميم عن طريق التحليل في اثناء عملية تعليم الطلاب كيفية حل المسائل. ونتائج ابحاث دافيدف وتلاميذه تؤكدان احراء تحليل كامل ودقيق للمسائل الكبيرة تعطي الطلاب امكانية مباشرة للتمكن من الطرائق العامة كل صف كامل من المسائل أي لتعميم الحل.

٣) حول عملية التجريد :

في اثناء عملية تعرف الانسان على موضوعات العالم الواقعي والظواهر الحقيقية تنعكس هذه الموضوعات والظواهر في وعيه اما بشكل صورة حسية أو بشكل مفهوم. والمفهوم هو صورة تقريبية لهذه الموضوعات أو الظواهر الحقيقية. وتتشكل المفاهيم في وعي الانسان نتيجة صرف الاهتمام عن الخواص غير الجوهرية في الموضوع أو الظاهرة المدروسة، واظهار خواص هامة بالنسبة للبحث الذي نقوم به. هذا البناء العقلي في عملية الادراك يسمى التجريد العلمي.

وعلم النفس يؤكد ان التجريد هو في الواقع شكل خاص يبدأ من التحليل، ذلك الشكل الذي يأخذه التحليل عندما يتحول في الفكر المجرد الى مفاهيم.

والتجريد طريقة هامة جدا في طرائق الادراك الرياضي وبالتالي طريقة هامة من طرائق تدريس الرياضيات.

٤) التخصيص في اثناء تدريس الرياضيات :

ان عملية التخصص مرتبطة ارتباطا وثيقا بعمليتي التعميم والتجريد. فعملية التخصص هي تمييز فكري لبعض خواص الجسم المدروس من مجموعة الخواص التي يتمتع بها هذا الجسم (أو الموضوع المدروس) مثلا :

اذا ميزنا (خصصنا) من مجموعة المعينات ذلك المعين الذي يحوي قطرين متساويين فاننا نحصل على مربع. اذن يمكن القول ان التخصيص عبارة عن تحويل من المجموعة المدروسة الى مجموعة اخرى محتواه فيها.

في الختام تجدر الاشارة الى ان التعميم والتجريد والتحليل والتركيب والمقارنة والملاحظة والتجربة والتخصص تتمازج نحو وحدة واحدة اثناء البحث العلمي (واثناء التدريس) متفاعلة ومتداخلة في عملية التفكير. والنظر الى هذه الطرائق بشكل منفصل اثناء البحث العلمي (واثناء التدريس والبحث في طرائق التدريس) ممكن فقط بهدف دراستها.

بعض مراجع البحث

١) اردنيف ب. م. المقارنة والتعميم اثناء تدريس الرياضيات ــ موسكو ١٩٦٠.
٢) اوشنسكي ل. د. مجموعة مقالات الجزء ٧. موسكو ــ لينغراد ١٩٤٩.
٣) دافيدف ف. ف. اشكال التعميم في التعليم (مشاكل منطقية ونفسية في بناء المادة التعليمية) موسكو ١٩٧٢.
٤) روبنشتين س. ل. حول التفكير وطرق البحث فيه ــ موسكو ١٩٥٨.
٥) سيتشيفتشا و. م. طرق واشكال الادراك العلمي ــ موسكو ١٩٧٢.
٦) علم النفس العام. كتاب لطلاب معاهد التربية باشراف أ.ب. بتروفسكي ــ موسكو ١٩٧٦.
٧) ميتلسكي ن. ب. نبذة من تاريخ طرائق تدريس الرياضيات ــ مينك ١٩٦٨.