دور ثراء بيئة التعلم
في إثراء تعلم الرياضيات المدرسية

إعـــــداد
أ.د. رفعت محمد حسن المليجى

دور ثراء بيئة التعلم في إثراء تعلم الرياضيات المدرسية

أ.د/ رفعت محمد حسن المليجى

تشهد الساحة التربوية منذ بداية الألفية الثالثة زخماً متزايداً حول الأساليب التى يمكن من خلالها تحسين عمليات التعليم والتعلم، وواكب ذلك الزخم اهتمام واسع بحركة المعايير، وتأكيد وتركيز على أهمية الاستراتيجيات التى تجعل المتعلم محوراً للعملية التعليمية، بحيث يتحول دور المعلم من تلقين المعلومات إلى تيسير عملية التعلم، ويتحول دور المتعلم من تلقي المعلومات واستظهارها إلى دور نشط يبني المتعلم من خلاله معرفته، ويمارس الاستكشاف والتحليل والتعميم، ويناقش الأفكار وصولاً إلى رؤية جديدة للمقررات التى يدرسها.

وقد سارت أدبيات تعليم الرياضيات على هذا النهج، وصدرت عنها بعض التوجهات العامة لتعليم الرياضيات في الألفية الجديدة، تلتقط الورقة الحالية بعضها، وتتناولها بالشرح والتوضيح، وتدعم هذا التناول بأمثلة تطبيقية تبين الدور الذي تلعبه بيئة التعلم في تجهيز تعلم يشعر فيه المتعلم بالمتعة، وتوجز ما يمكن أن يقوم المتعلم بأدائه من المهارات العقلية والعملية، وما يمكن أن يكتسبه من قيم وسلوكيات من خلال دراسته للرياضيات.

وسوف تتناول الورقة الحالية المحاور الأربعة التالية:

١- كيف يرى التلاميذ الرياضيات؟

٢- تشكيل الحس بالرياضيات Mathematical Sense لدى التلاميذ.

٣- تنمية الحس بالعدد Number Sense ومجالات استخدامه.

٤- توضيح مظاهر الاستمتاع بالهندسة.

المحور الأول: كيف يرى التلاميذ الرياضيات؟

تعد الرياضيات أماً للعلوم الدقيقة، وغذاء للعقول، وأحد أروع ما ابتدعه العقل الإنساني من لغات، ولا يمكن لأحد أن ينكر أهميتها الكبيرة في حياة الإنسان.

ويميز الرياضيات قدرتها على اختصار الجمل المطولة من خلال استخدام الرموز الرياضية، كما أنها خالية من الإطالة فهي لغة يميزها الإيجاز والاختصار، وهي تساعد على التعبير عن الأفكار على نحو دقيق، بالإضافة إلى أنها تمكن من الفهم والتذوق، وتتميز بالمنطق والوضوح والجمال.

وتعمل الرياضيات على تنمية العديد من القيم التربوية مثل القيم التطبيقية والنظامية والثقافية والعقلية والجمالية والمهنية والبيئشخصية.

ويرى عدد من التلاميذ أن الرياضيات وتذكرها وتطبيقها على نحو مناسب وفهمها يعد أمراً صعباً.

لماذا تبدو الرياضيات صعبة أمام التلاميذ؟

عند تحرك التلميذ فى مساق الرياضيات، فإنه من المهم أن يصبح متعلماً نشطاً، يمارس العمل والتفكير في الرياضيات، ويحاول أن يعرض الأشياء بكلماته هو وليس عن طريق القراءة السلبية لموضوعاتها.

وينظر التلاميذ إلى الرياضيات من زوايا متعددة، ويعبرون عنها كالتالي:

أ- إنها عبارة عن أعداد ورموز وأشكال.

ب - إنها تجمع من التقنيات مثل: كيف نجمع الكسور، كيف نقيس زاوية، كيف نحل معادلة؟

ج - إنها الحساب والجبر والهندسة.

د – إنها الحساب والقياس – المقارنة والعد – الأنماط والخواص – التحليل والمنطق.

هـ – إنها وعاء للبحث وحل المشكلات.

و – إنها دراسة مجرد للخواص والعلاقات.

ومهما تعددت الرؤى حول تعريف الرياضيات فإنه من المهم الرجوع إلى القواميس ودوائر المعارف، كما يمكن الحصول على مصادر للتعريفات من خلال بعض مواقع شبكات الإنترنت، مع الأخذ في الاعتبار أن دقة وصدق التعريف قد لا تكون مؤكدة في عدد من هذه المواقع.

ورغم تعدد التعريفات، فإن الرياضيات تحتوى على مدى متسع من الأفكار والأنشطة يتضمن كل ما ذكره التلاميذ عنها، وسواء تم النظر إليها على أنها أداة للعلم أو الهندسة، أو كطريقة للتفكير، أو كدراسة في ذاتها، فإن هذه النظرة تشكل كيفية توجيه عملية التعلم، فإذا تم رؤيتها على أنها تجمع من التقنيات أو سلسلة من الموضوعات، فإن التعلم عندئذ يمكن أن يصبح اختباراً للذاكرة، أما إذا تم التفكير في الرياضيات على أنها شبكة مترامية الأطراف من الأفكار ذات العلاقة يمكنها تجهيز طريق لحل المسائل التطبيقية أو المجردة يمكنه المساعدة في عملية التواصل الرياضي وتنمية الفهم، فإن من الطبيعي أن يترك للتلميذ عمل التواصل الرياضي الذي يناسب الأداء الذي يقوم به.

ويمكن التفكير في الرياضيات على أنها طريق للتفكير أو على أنها لغة، لكن بالنسبة لكثير من الناس فإن صعوبة الرياضيات تظهر عند محاولة كتابتها.

ومن المهم أن نتذكر انه عندما نستخدم الكلمة في الرياضيات، فإنه يكون لها أحياناً معان متعددة أو أكثر ضبطاً مما لو استخدمنا نفس الكلمة في

حياتنا اليومية، وعلى سبيل المثال فإن كلمة Sum تستخدم عموماً للوصل أو الإحصاء، لكن في الرياضيات يستخدم اللفظ Sigma ($\sum$) بمعنى إضافة أشياء معاً، بينما يستخدم الرمز (-) فى طرق متنوعة للإفصاح بدقة متناهية عن معاني متعددة تعتمد على السياق مثل:

أ- يستخدم الرمز (-) لإظهار عملية الطرح مثل ٧ - ٤ = ٣ (سبعة ناقص أربعة تساوى ٣ ، أو سبعة أخذنا منها ثلاثة يتبقى أربعة).

ب - يستخدم الرمز (-) للمقارنة كما فى ٧ - ٤ = ٣ (الفرق بين سبعة وأربعة يساوى ثلاثة).

ج - يستخدم الرمز (-) للدلالة على الاتجاه مثل (-٧) سالب سبعة وهو النظير الجمعي للعدد (٧).

كما أن هناك عاملاً آخر يمكن أن يشكل إرباكاً لمتعلم الرياضيات، وهو أن الشئ نفسه يمكن أن يعرض بطرق مختلفة، وعلى سبيل المثال :

$\frac{١}{٢}$ ، ٠,٥ ، ٥٠% ، $\frac{٥٠}{١٠٠}$ هي بصورة اساسية تعبير عن العدد نفسه ولكن في أشكال مختلفة.

كما أن الرياضيات يمكن أن تقدم في صورة جداول أو أشكال أو رسوم بيانية أو في تعبيرات جبرية.

وهذه التمثيلات المختلفة قد تم تنميتها لأسباب متعددة، وأصبحت قابلة للتحويل بين هذه التمثيلات التى تجهز استبصاراً أعمق، ولعمل مسائل أسهل للفهم وأسهل أيضا في الحل.

كما أن من العوامل التى تسهم في تشكيل رؤية التلاميذ للرياضيات الأسلوب الذي تعرض به الرياضيات في الكتب المدرسية، والذي يجعل التلاميذ يعتقدون بأنه يمكن تتبعها فقط عن طريق الأسلوب المنطقي الذي يظهر في سلسلة

التعريفات وطرق الحل لأنواع المسائل والنظريات، ويغفلون القدرة على التخيل الذي يعد القوة الدافعة للكشف الرياضي.

كما أنه من النادر أن يفكر التلاميذ في حلول المسائل بطريقة حسية أو واقعية، بل يتجهون إلى استخدام الالجوريثمات الحسابية المتعلقة بالمسألة، دون اهتمام بمعقولية النتائج التي يحصلون عليها، وينتظرون ردود المعلم على استجاباتهم، فإذا لم تتطابق معها يبدأون في فحص المسألة من جديد.

ويدفعنا ذلك إلى ضرورة التفكير في الكيفية التي تيسر للتلاميذ الجانب المنتج في الرياضيات حتى يصلوا إلى رؤية جيدة لها.

ويتواكب ذلك مع الدعوة التي ظهرت على الساحة التربوية، والتي تنادي بتأسيس مدخل للرياضيات المدرسية من مستوى رياض الأطفال وحتى نهاية المرحل الثانوية، يعتمد على تعويد التلاميذ على التمكن من حل المسائل الرياضية، وتعلم كيفية التواصل رياضياً، وعلى حرية التفكير الرياضي، وتقدير الرياضيات، والثقة في أدائها.

كما يتفق ذلك مع الدعوى إلى أن يمر كل التلاميذ بخبرة حل المشكلات والاستقصاء كجزء من رياضياتهم المدرسية، باعتبار أن حل المشكلات – كما وصفها وليم عبيد – جوهر وروح الرياضيات.

المحور الثاني: تشكيل الحس بالرياضيات Mathematical Sense لدى التلاميذ:

توجد عدة استراتيجيات يمكنها مساعدة التلاميذ على حل المسائل الرياضية، وبناء المعرفة بالرياضيات. إن نقطة البداية المفيدة هي محاولة صنع حس بالمسألة ومراجعة ما الذي نعرفه بالفعل.

مثال ١ : أ – أنظر إلى الجدول التالي ثم أكمل الأسطر القليلة المتبقية.

ب – أسرد كل الأشياء التى تعرفها أو تلاحظها عن عناصر كل عمود وكل صف.

أ رقم الصف	ب	ج	د	هـ
١	١	١	١ × ١	$١^{٢}$
٢	١ + ٣	٤	٢ × ٢	$٢^{٢}$
٣	١ + ٣ + ٥	٩	٣ × ٣	$٣^{٢}$
٤	١ + ٣ + ٥ + ٧	١٦	٤ × ٤	$٤^{٢}$
٥	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

تعقيب:

لكى تكمل الجدول، فأنك لا تحتاج إلى معرفة الكثير من الرياضيات، إن ما تقوم به هو أتباع النمط الذي تراه في الجدول.

ربما تلاحظ عدداً من الأشياء تشمل ما يلي:

أ- التحرك إلى أسفل في كل عمود يظهر نمطاً، وعلى سبيل المثال فإن العمود (أ) يظهر الأرقام التالية (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...) والعمود الثاني (١ ، ١ + ٣ ، ١ + ٣ + ٥ ، ...) .... والعمود الأخير ($١^{٢}$ ، $٢^{٢}$ ، $٣^{٢}$ ، ...).

ب- التحرك خلال الصفوف يظهر تنوعاً من الأنماط (الرموز، والتمثيلات، والترميز) وعلى سبيل المثال فأنه في الصف الثاني نجد (١ + ٣ ، ٢ × ٢ ، $٢^{٢}$).

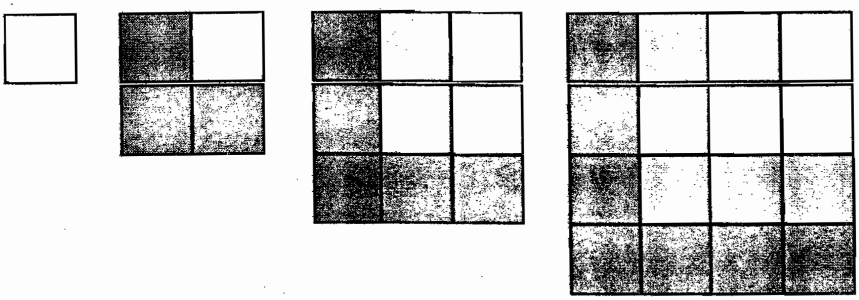
ج- تذكر أن $٣^{٢}$ تعنى ثلاثة تربيع او ثلاثة مرفوعة للقوة ٢.

د- لحظة المفاجأة هي أن جمع أعداد فردية بدءاً بالعدد (١) ينتج عدداً مربعاً (١ + ٣ = ٤) ، (١ + ٣ + ٥ = ٩)، ....

مع الأخذ في الاعتبار أن ما تم في هذا المثال لا يشكل برهاناً على أن مجموع أعداد فردية متتالية بدءاً بالواحد الصحيح ينتج دائماً عدداً مربعاً رغم أن ذلك صحيح عموماً - ، ولكن لكي تكون قوى الحجة وقاطعاً رياضياً فأنه من المهم تجهيز برهان.

مثال ٢ : أنظر إلى الأشكال التالية:

1 2 3 4



ارسم الشكل التالي لها في السياق ثم أذكر ما الذي تلاحظ بقاءه كما هو دون تغيير وما الذي تلاحظ أنه تغير؟ أكتب ما تراه ووضح كيف فكرت فيما توصلت إليه.

تعقيب:

إن تركيز الانتباه على ما ظل ثابتاً وما الذي تغير في سلسلة الأشكال التي أمامك يساعد في تحديد ما الذي يكون خاصاً بمثال محدد (حالة خاصة) وما الذي يكون عاماً للمجموعة كلها، وهذا ما يقود غالباً إلى استبصار أكثر.

لاحظ أن كل شكل (عوضاً عن الشكل ١) هو مربع مكون من شبكة من المربعات الأصغر، فمثلاً الشكل (٢) مكون من (٢ × ٢) مربعاً، والشكل (٣) مكون من (٣ × ٣) مربعاً.

كونّ الشكل (٥) في السلسلة حتى تصل إلى تكوين حس بالسلسلة.

إنك قد ترسم شبكة مربعة (٥ × ٥) لماذا؟ ثم قم بتظليل المربعات الصغيرة، هل تلاحظ عدد المربعات المظللة بكل ظل (الفاتح والداكن)؟ أو أنك قد تبني الشبكة عن طريق نسخ الشكل الرابع وبعد ذلك تضيف مربعات أصغر على الجانب أو على الأرضية (لماذا؟) أو باستخدام طرق أخرى (لماذا؟).

إن الإجابة عن هذه الأسئلة (لماذا؟) سوف تساعدك على الإمساك بالنسق أو الترتيب عن الذي لاحظته – ما الذي ركزت عليه وما الذي أغفلته.

إن الأشكال المربعة التى تراها هي تمثيل هندسي للصفوف الأربع الأولي التى رأيتها في الجدول الموضح في المثال (١).

ما الذي تلاحظ؟ إذا لم تكن متأكداً، أنظر خلفاً لما سبق استعراضه من قبل حول إمكانية عرض الشئ نفسه بطرق مختلفة، وعندئذ سوف تصل إلى الاقتناع بما تلاحظه.

إن استراتيجية ملاحظة ما الذي بقي كما هو وما الذي اختلف، هى أحدى الاستراتيجيات التى يمكن أن تكون مفيدة لصنع حس رياضي من خلال تنوع الحالات وليس فقط من تلك التى تتضمن صوراً أو أشكالاً، إن هذه الاستراتيجية تنجح بسبب عملية تشجيع التركيز أو التجاهل للمظاهر المختلفة.

الانتباه سوف يتحول إلى الخلف والأمام حتى يمكن رؤية الحالة في ضوء جديد وباستبصار أكبر.

إن رؤية الحالة هو طريق واحد لاستخدام التخيل العقلي الذي يمكن تضمينه، (على سبيل المثال استدعاء أصوات أو مشاعر ...) إنه قد يتوجب عليك التخيل قبل البدء في رسم الشكل الخامس في مثال (٢).

وأحياناً تأخذ الصور العقلية شكل الصور التى قد لا يكون سهلاً ولا مفيداً رسمها، ويصبح الأفضل من ذلك تخيلها داخل العقل .

إن الأعداد الفردية التى تم إضافتها، وهي المربعات المظللة، هي في تتابع مرتب يظهره الجدول التالي:

تتابع الأعداد الفردية

الموضع في التتابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الخامس	...
القيمة	١	٣	٥	٧	٩	...

الأشكال الموضحة في مثال (٢) يمكنه تخيلها (تصورها) على أنها نمو للمربع عن طريق إضافة التتابع الخاص بالأعداد الفردية التى يمكن تمثيلها بالمربعات الصغرى.

هذا البناء يمكن أن يتم تفسيره على أنه أداء أو (عمل) رياضي Mathematical Doing .

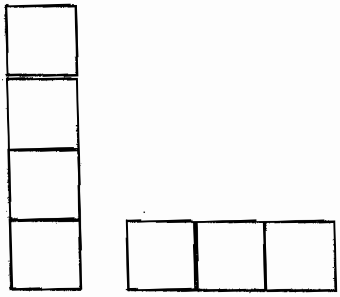
التصور والتمثيل Visualising and Representing :

حاول أن تتخيل شكل المربع رقم (٦) فى سلسلة الأشكال المربعة التى ظهرت في مثال (٢). قم ذهنياً بتفكيك هذا المربع إلى القطع الممثلة بشكل (حرف L) التى تشكله. وهذه العملية يمكن التفكير فيها على أنها (نقيض) بناء المربع.

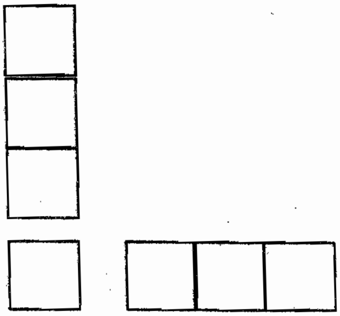
حاول وصف أي تمثيلات محددة لعدد فردى ممثل بشكل (حرف L) بالكلمات بحيث يستطيع أي شخص آخر التعبير كتابة عن أي عدد فردى.

تعقيب:

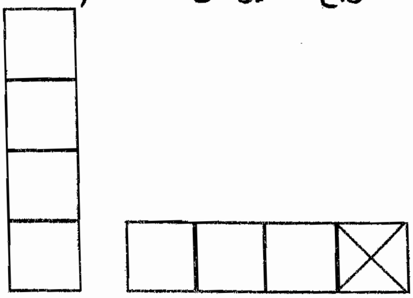
على سبيل المثال، العدد الفردى قد يتم وصفه بشكل (حرف L) مكون من ذراعين، أحدهما يشتمل على (٤) مربعات صغيرة، والآخر يشتمل على (٣) مربعات (أقل بمقدار ١ من ٤) وهذا يعني ٣ + ٤ = ٧



وكبديل لذلك، يمكن رسم شكل آخر على صورة (حرف L) مكـــون من ذراعين كل منهما يشتمل على (٣) مربعات ونضيف إليهما مربعاً واحداً مفرداً، وهذا معناه (٣ + ٣ + ١) ، (٢ × ٣ + ١) ، لاحظ أن (٣) تقل عن (٤) بمقدار (١).



كما يمكن أن يرسم كذراعين كل منهما مكـــون مـــن (٤) مربعـــات صغيرة مع حذف مربع صغير من أحدهما (٢ × ٤ – ١).



بذلك فإن أي عدد فردى يمكن إظهاره بنفس الطريقة، حتى أن إحدى الطرق لايجاد قيمة أي عدد فردي في التتابع هو مضاعفة الرقم الذي يشير إلى موضوع العدد في التتابع ثم طرح (١) نم الناتج.

وكما ذكرنا من قبل، فإن الرياضيات يمكن تمثيلها بطرق مختلفة، كما أنها تصبح قبالة للتحويل بين تمثيلات يمكنها تجهيز استبصار أكبر.

وخلال الاستعراض السابق، يتضح أن نقض التمثيلات الهندسية لأعداد فردية محددة (حالات خاصة)، ثم عرض النتائج عددياً بطرق مختلفة يظهر أنماطاً عامة عن كيفية أن تكون الأعداد الفردية نقيضاً.

وفي حالات عديدة فإن عملية رياضية واحدة لها أثر النقيض بالنسبة لعملية أخرى، وعلى سبيل المثال الطرح هو نقيض الجمع، والتنصيف نقيض التضعيف، ولو أن (النقيض) يكون غالباً أصعب من (العمل).

إن التفكير على أساس العمل والنقيض يمكن أن يكون نافعاً في فهم الحالات بشكل أفضل.

العمل والنقيض:

استخدام ما استعرضناه من قبل، إحسب ما يلي، كن متنبهاً إلى الكيفية التى تؤدي بها العمل.

١- ما هو العدد الفردى الرابع عشر؟

٢- عند أي موضع في تتابع الأعداد الفردية يقع العدد (٤٧)؟

الإجابة: ١ - للإجابة عن السؤال الأول :

نضاعف العدد (١٤)، ونطرح (١) فنحصل على (٢٧).

٢- بالنسبة للسؤال الثاني فأنه هذا يتضمن نقيض التعبير العام لأي عدد فردى. إننا نعرف أن مضاعفة (شئ) وطرح (١) يعطي (٤٧). الذي نريد معرفته هو قيمة هذا (الشئ).

ن التفكير يقترح أن (ضعف الشئ) يجب أن يكون أزيد مــن (٤٧) بمقدار الواحد الصحيح أي يساوى (٤٨)، نصف ٤٨وهو (نقيض الضــعف) هو ٢٤، وهذا معناه أن (٤٧) هو العدد الفردى الرابع والعشرون.

احظ انه لم تكن العمليات فقط هي التى تم نقضها، لكن ترتيب عملها كان منعكساً.

العمل: تخير عدداً ← ضاعفه ← أضف واحد ← الإجابة

النقيض: العدد الأصلي → نصف الناتج → أطرح واحد → الإجابة

إن إدراك إمكانية وجود نقيض للفعل الرياضي يسمح أيضاً بطرح أسئلة جديدة والإجابة عنها.

المحور الثالث: تنمية الحس بالعدد Number Sense ومجــالات استخدامه.

يتناول هذا المحور الأعداد واستخداماتها، ويركز على استخدام الأعــداد في القياس أو في العد، والقضايا التى يمكن ان تثار هنا هي:

١- ما الفرق بين العد والقياس؟

٢- ما الأنواع المختلفة للعدد، وما هي الروابط بينها؟

٣- ما الطرق المختلفة لتمثيل الأعداد؟

٤- ما الطرق الفعالة للعد، سواء باستخدام الطرق العقلية، الآلات الحاســبة أو الطريقة الكتابية؟

٥- ما القضايا المتضمنة فى الحساب باستخدام الكسور؟

ويتم تقسيم هذا المحور إلى أربعة أقسام:

أ - كيف تستخدم الأعداد؟ ب- أنواع العدد.

ج – تمثيل الإعداد. د – الحساب.

أ – كيف تستخدم الأعداد؟

تستخدم الأعداد إما بصورة عامة وإما بطرق متعددة قد لا يكون بعضها ملاحظاً، التفكير حول كيف ولماذا تستخدم الأعداد يثير بعض الأسئلة المشوقة:

- أي الأشياء جديرة بالعد ولماذا؟
- كيف تظهر الأعداد؟
- ما الذي يتم عمله بالأعداد؟

إن الحصول على الإحساس لإجابة كل سؤال يمكن أن يساعد في التعامل مع الأعداد، كما أن المعرفة بالأعداد في مواقف الحياة اليومية قد يساعد على العمل خلال المهام التالية:

المهمة الأولي: أيامك أعداد

عد بذاكرتك إلى الأيام القليلة الماضية، وحاول أن تستحضر في ذهنك كيف وأين رأيت الأعداد؟، ما الأعداد التى تعاملت معها؟ وفي أي سياق تم ذلك؟ وأن أنواع العدد قمت بملاقاتها؟

تعقيب:

بعض الأمثلة يمكن الحصول عليها من خلال رؤيتك لعدة أشياء:

في حياتك اليومية: الأعداد التى تراها على ساعة الحائط المعلقة على جدار غرفتك، عداد السرعة بالسيارة، لوحة المرور التى تبين الحد الأقصي للسرعة على الطرق، أرقام الهواتف الأرضية والجوالة، الأعداد الموجودة على التقويم الذي يبين أيام الشهر ومسمياتها، لوحد عداد البنزين في محطات تعبئة وقود السيارات ... وهكذا.

إن العد والقياس طريقان جوهريان (بالغا الأهمية) يتم عن طريقهما تقديم الأعداد داخل العالم الذي نعيش فيه، ويستخدم العد عندما نحتاج معرفة عدد الأشياء التى نراها، بينما يستخدم القياس عندما نرغب في تحديد طول شئ أو مساحة غرفة أو حجم مجسم أو سرعة سيارة، أم الاستخدام الثالث للعد فهو يفرض الترقيم، والترقيم يتم نتيجة للعد أو القياس.

التصنيف: يمكن تصنيف الأعداد في ثلاثة أقسام تعتمد على ما إذا كانت تنشأ من العد أو القياس أو الترقيم.

والجدول التالي يعطي أمثلة لهذا التصنيف (التبويب):

الأمثلة	الغرض من الاستخدام	تعقيب
رقم المنزل	ترقيم	تستخدم أعداد صحيحة (زوجية أو فردية).
رمز السرعة القصوى للسيارة .	قياس	تحذف وحدة السرعة (كم/ساعة) من اللوحة التي ترمز للحد الأقصى للسرعة.
رقم التليفون	ترقيم	يمكن الإشارة إلى المنطقة أو المساحة التى يغطيها الاتصال الهاتفي.
رقم الصفحة	عدّ	التتابع يعطي معلومات عن الموضع.

العد Counting:

عندما تستخدم كلمة (عدد) فأنك ف الغالب تفكر في ترقيم الأشياء أو الأحداث (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ...) وإذا كانت الأعداد التى نتعامل معها كبيرة فهناك احتمال أن ينسي الفرد عدداً منها (خاصة العدد الأخير)، ولهذا يمكن التفكير فى استخدام طريقة العد بالحزم وهو نظام للتجمع في حزم كل منها مكون من خمسة أرقام //// .

وتكون صيغة السؤال التى تتناول العدد على صورة How Many ويستخدم فقط أعداداً كلية منفصلة.

القياس Measure: يستخدم القياس لصنع مقارنة خالصة (تامة) أو نسبية (اعتبارية) وتكون صيغة السؤال التي تتناول القياس على صورة How Much ويستخدم تداريج مستمرة تتضمن الكسور الاعتبارية والعشرية والنسب المئوية.

العدد Number: يظهر هذا الجزء أنواع الفرق الخاصة بالعدد المجرد (التام) وأسماؤها والعلاقات بينها.

أنواع العدد: هناك أنواع مختلفة من الأعداد في هذه القائمة وأنت تعرفها بالفعل، هل يمكن أن تشرح كلاً منها أو تعطي أمثلة لاستخداماتها؟

أعداد العد	الأعداد الصحيحة	الكسور العشرية
الأعداد النسبية	الأعداد غير النسبية	الأعداد الحقيقية
الأعداد الطبيعية	الأعداد الكلية	الكسور
الأعداد الموجبة	الأعداد السالبة	الأعداد المركبة

تعقيب :

لقد مرت عدة قرون تاريخياً على ابتداع وبعد ذلك تصنيف الأنواع المختلفة من الأعداد وخواصها، إنه من الممكن أن نشرح بعض أنواع الأعداد وخواصها، لكن المشكلة تكمن فى وصلها معاً.

أعداد العد : أصغر أعداد العد هو (١). إن أحد طرق رؤية أعداد العدَ هو تخيل خط فارغ، نبدأ فى ملئه بأعداد العد بدءاً من العدد (١) ثم المضى قدماً بعد ذلك.

الخط الموضح يظهر خطوات وضع أعداد العد من اليسار إلى اليمين.

وحيث أنه يمكن إضافة أعدادٍ أخرى ، فإن هناك إمكانية لأعداد العدّ أن تستمر إلى أى مدى نريد٠

وتظهر مشكلة فى مسميات بعض الأعداد التى سبق الإشارة إليهـا، مثل الأعداد الطبيعية والأعداد الكلية، وهما عند استخدامهما يمكن أن يحـدثا إرباكاً أو تشويشاً، بسبب أنه ليس واضحاً دائماً ما إذا كان العـدد (صـفر) يكون متضمناً أم لا؟ وربما يكون من الأفضل أن نستخدم مجموعة الأعـداد الطبيعية بدلاً من أعداد العدّ ، واستخدام مجموعة الأعداد الكلية عندما نرغب فى تضمين الصفر٠

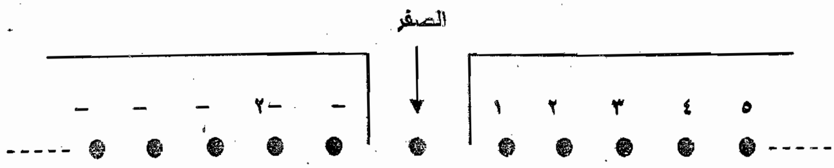
التوسيع Extending : طريق آخر للتفكير فى أعداد العد، هو أنه توجد مرات يمكن فيها الحصول على هذه الأعداد باستخدام الآلة الحاسـبة، فقـط باسـتخدام المفاتيح ١، ٢،........، ٨، ٩ وعلامتى (+) ، (=)٠

ما الأعداد الأخرى التى يمكن أن تنتج باستخدام مفتاح (-) عرضـاً عن المفتاح (+)؟

تعقيب: استخدام المفتاح (-) يمكن أن يقود إلى العدد صفر والأعـداد السالبة٠

الأعداد الصحيحة : مجموعة الأعداد الصحيحة والتى يمكن أن تشير بالتباس إلى الأعداد الكلية والتى تتكون من الصفر وأعداد العد (فـى هـذا الوقت يتم التفكير فيها على أنها الأعداد الكلية الموجبة) وأيضاً الأعداد الكلية السالبة (-١ ، -٢ ، -٣ ، ....)٠

الصورة المفيدة هنا هى تصور وجود مرآة تسـتقر عنـد (الصـفر) للأعداد الكلية ، وتكون الأعداد السالبة عندها هى صورة المـرآة للأعـداد الموجبة المناظرة٠



الكسور الاعتيادية والكسور العشرية والأعداد النسبية :-

مثلما امتدت أعداد العد لتشكيل مجموعة الأعداد الصحيحة (التامة) عن طريق استخدام الطرح فبالمثل ، أعداد العد يمكن أن يكون لها امتداد أكبر عن طريق القسمة.

دعنا نعبر عن خارج قسمة ٣ على ٥ إنه يمكن أن يتم تقديمه بواسطة إحدى الصور التالية :

٣ ÷٥ تعطى الكسر الاعتيادى $\frac{٣}{٥}$

٣ ÷ ٥ تعطى الكسر العشرى ,٦

٣ ÷ ٥ تعطى العدد النسبى $\frac{٣}{٥}$

إن الصور الثلاث السابقة تظهر نفس العدد. وكلمة عدد نسبى مصدرها كلمة نسبة ، والتى تتضمن إظهار العلاقة بين عددين صحيحين تربطهما عملية القسمة. قم بتمثيل العدد النسبى $\frac{٣}{٥}$ على خط الأعداد.

إن العدد النسبى $\frac{٣}{٥}$ سوف يجئ موضعه على خط الأعداد بين ٠ ، ١ ما الحالات الأخرى للقسمة التى تعطى الإجابة ٠,٦ ؟

إن بعض الإجابات المحتملة هى ٦÷١٠ ، ١٢÷٢٠ ، ٣٠÷٥٠، ١٢٠٠٠ ÷ ٢٠٠٠٠ .

إن هذا التفكير له قيمة فى إبداع حالات قسمة لإعطاء نفس الإجابة ، والإجابات تقترح عدة طرق يمكن استخدامها لهذا الغرض.

جميع الحالات $\frac{٦}{١٠}$ ، $\frac{١٢}{٢٠}$ ، $\frac{٣٠}{٥٠}$ ، $\frac{١٢٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$ تظهر نفس العدد النسبي $\frac{٣}{٥}$ ، ولها نفس الموضع على خط الأعداد ، وجميعها كسور متكافئة، ويطلق عليها جميعاً أسم الأعداد النسبية.

لاحظ أن الكسور الاعتيادية والعشرية لا تعد أنواعاً مختلفة للعدد ولكن تعد طرقاً مختلفة لتمثيل العدد النسبي.

ضوعند تسميه العدد النسبى – سواء باستخدام الكسور الاعتيادية أو العشرية – نختار الصورة الأبسط للتعبير عن العدد النسبى فى صورة الكسر الاعتيادي $\frac{٣}{٥}$ أو فى صورة الكسر العشرى (٠,٦)٠

ويعتمد استخدام الكسر الاعتيادي أو الكسر العشرى على الحاجة لجعل الحساب أسهل أو لعمل الاتصال بشكل أوضح٠ وعندما نستخدم الآلة الحاسبة فإن من المحتمل أن يكون استخدام الكسور العشرية أكثر كفاءة٠

أن ناتج قسمة أى عدد كلى على عدد كلى آخر ينتج عدداً نسبياً ، وعلى سبيل المثال إذا بدأنا بالعددين ١ ، ٢ وقمنا بقسمة ١ على ٢ فإننا نحصل على العدد النسبى $\frac{١}{٢}$ ، وموقعه على خط الأعداد هو نقطة على مسافة متساوية من ١ ، ٢ ويمكن أن تتم القسمة بشكل معكوس $\frac{٢}{١}$ = ٢ والتى هى أيضاً عدد كلي ، وفى نفس الوقت هى عدد نسبى أيضاً٠ وهذا يعنى أن الأعداد الصحيحة يمكنها أيضاً أن تكون أعداداً نسبية ، حيث أنها يمكن أن تنتج من قسمة عددين كليين (العدد الصحيح والواحد).

إن قسمة عدد صحيح على آخر يمكن أن ينتج نظاماً من الأعداد يمكنها أن تشغل كل النقاط الممكنة على خط الأعداد وعلى سبيل المثال فإن ٢,١ ، ٢,٢ يمكن أن نحصل عليهما من $\frac{٢١}{١٠}$، $\frac{٢٢}{١٠}$ على التوالى.

كما أنه يمكن التفكير فى عدد نسبى يقع بين ٢,١ ، ٢,٢ (على سبيل المثال ٢,١٣ ، ٢,١٧) ، وإذا اردنا أن نعبر عن كل عدد نسبى منهما فى صورة كسر اعتيادي فسوف يتعين علينا القسمة على ١٠٠ عوضاً عن ١٠.

فمثلاً: ٢,١٣ = $\frac{٢١٣}{١٠٠}$ ، ٢,١٧ = $\frac{٢١٧}{١٠٠}$

وفي عملية مشابهة، فإن أى عدد نسبي بين ٢,١٣ ، ٢,١٤ يمكن أن نحصل عليه عن طريق اختيار ١٠٠٠ كمقام.

٢,١٣٦ = $\frac{٢١٣٦}{١٠٠٠}$

ومثل العملية السابقة يمكن أن ينجز بين أي زوج من الكسور العشرية.

والآن هل يمكنك أبتداع أعداد بين ٤,١٧٢٢ ، ٤,١٧٢٣ يمكن تمثيلها على خط الأعداد الخاص بك؟

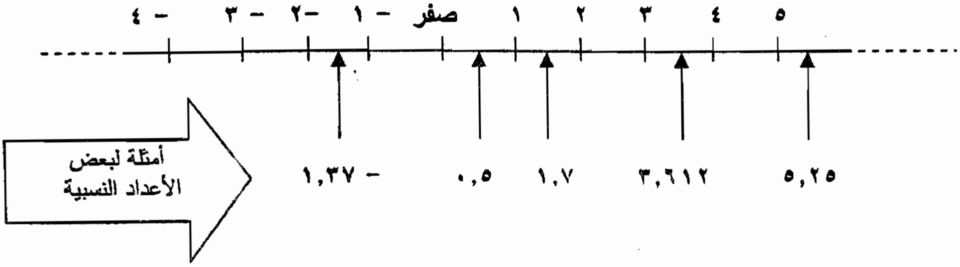
إن من الواضح أنه توجد تسع أعداد جديدة بين عددين متجاورين ٤,١٧٢٢ ، ٤,١٧٢٣ ويمكن وضعها بهذه الكيفية.

٤,١٧٢٢١ ، ٤,١٧٢٢٢ ، ٤,١٧٢٢٣ ، ... ...

وهذا يوضح أن هناك صفاً من الأعداد النسبية يشغل نقاط خط الأعداد.

إن الفجوة بين أي عددين نسبيين يمكن أن تملأ بواسطة أعداد نسبية أكثر عن طريق زيادة العدد المقسوم عليه بواسطة زيادة قوى العدد (١٠).

فيما يلي خط أعداد تظهر فيه بعض الأعداد النسبية.



ترتيب الكسور الاعتيادية والكسور العشرية:

إذا كان ترتيب الكسور الاعتيادية يعد صعباً، فأنه يصبح من الملائم غالباً إظهار الكسور الاعتيادية في صورة كسور عشرية.

وعلى سبيل المثال، فإنه لا يمكن لكثير من الناس القول بأن $\frac{٨}{١١}$ أكبر أم $\frac{٧}{٩}$.

وعلى ذلك فإن الكسور العشرية بسبب أنها تستخدم نظام القيمة المكانية، يمكنها القيام بعمليات الترتيب والمقارنة بشكل أكثر سـهولة، إلا أن هنـاك مظاهر لترتيب الكسور العشرية التى يراها الناس مربكة أو محيرة.

أنظر إلى الأمثلة التالية حتى تدرك الإرباك المحتمل:

مثال: رتب الكسور العشرية التالية من الأصغر إلى الأكبر:

أ – ٠,٠٧ ، ٠,٢٣ ، ٠,١

ب – ٠,٧٣٥ ، ٠,٧٤

ج – – ٣,٧٥ ، – ٢,٨٤

في كل حالة أذكر الأسباب التى قد تجعل أحداً يعطي الإجابة الخطأ.

تعقيب: عد إلي المثال السابق، في الجزء (أ) يكون الترتيب الصحيح للكسور العشرية من الأصغر إلى الأكبر علي النحو التالي:

٠,٠٧ ، ٠,١ ، ٢٣.٠

قد يخطئ البعض في وضع هذه الإجابة وأحد مصادر الخطـأ فـي الحل هو إغفال العلامة العشرية، والذي قد يدفع بعض التلاميذ إلى اعتبار أن الترتيب التالي ٠,١ ، ٠,٠٧ ، ٠,٢٣ هو الترتيب الصحيح، هـل لاحظـت السبب؟ إنهم يرون فقط الأعداد ١ ، ٧ ، ٢٣ ويغفلون العلامـة العشـرية، فيضعون ترتيبهم للكسور في الصورة الخطأ.

في الجزء (ب) من المثال السابق الترتيب صحيح حيث ٠,٧٣٥ أصغر من ٠,٧٤ .

إن أحد مصادر الخطأ في حل هذا الجزء هو اعتقاد بعض التلاميذ أن ٠,٧٤ أصغر من ٠,٧٣٥ بسبب أن ٠,٧٤ تشتمل على رقمين فقط بينما ولكن ٠,٧٣٥ تشتمل على ثلاثة أرقام.

وفي الجزء (ج) من نفس المثال، الترتيب صحيح حيث أن – ٣,٧٥ بالفعل أصغر من – ٢,٨٤ .

إن أحد مصادر الخطأ في حل مثل هذا الجزء هو أن التلاميذ قد يتعاملون مع هذين العددين كما لو كانا موجبين، لأنهما لو كانا كذلك فإن ٢,٨٤ سوف تكون بالتأكيد أصغر من ٣,٧٥ ، أي أن إغفال الإشارة السالبة هو الذي قد يتسبب في هذا الخطأ.

الكسر العشرى الدائر:

إذا افترضنا أنك تعتزم مقارنة العددين $\frac{٨}{١١}$ ، $\frac{٧}{٩}$ لمعرفة أيهما أكبر واستخدمت الآلة الحاسبة لتحويل كل منهما من صورة كسر اعتيادي إلى كسر عشري، فأنك سوف تجد الآتي:

$$\frac{٨}{١١} = ٠,٧٢٧٢٧٢٧٢٧$$

$$\frac{٧}{٩} = ٠,٧٧٧٧٧٧٧٧٧$$

(ويعتمد عدد الأرقام على يمين العلاقة العشرية على نوع الآلة الحاسبة التى تستخدمها).

كلا الناتجين يعبر عن كسر عشري متكرر إلى ما لانهاية، ويسمي بالكسر العشري الدائر.

إن كل الأعداد النسبية يمكن وضعها في صورة كسور عشرية منتهية أو غير منتهية (عادية أو دوارة)، وعلى سبيل المثال:

$\frac{1}{3} = ٠,٣٣٣٣٣٣٣٣٣$

، $\frac{41}{333} = ٠,١٢٣١٢٣١٢٣$

كلاهما يعبر عن كسر عشرى دائر، بينما $\frac{27}{84} = ٠,٣٢١٤٢٨٥٧١$

تعبر عن كسر عشرى منته وليس دائراً .

وتوجد أيضا كسور عشرية غير محددة فلا هي منتهية ولا هي متكررة (دوارة) وهذه لا يمكن الحصول عليها بقسمة عددين صحيحين، هذه الأعداد يطلق عليها أسم الأعداد غير النسبية، وتشغل الفراغات على خط الأعداد المتبقية بين الأعداد النسبية، وتشتمل أعداداً مثل ٢ وهو العدد الذي إذا ضرب بنفسه يعطي $\sqrt{٢}$ وكذلك $\sqrt{٥}$ وهكذا.

ومن المدهش أن امتداد الكسر العشري المعبر عن $\sqrt{٢}$ لا يكرر نفسه أبداً .

$$\sqrt{٢} = ١,٤١٤٢١٣٥٦٢$$

كما أن هناك عدد آخر غير نسبي وهو العدد المعروف باسم (Π) ، لأن Π لا تساوى تماماً $\frac{22}{7}$ لكنها تقترب منها (وهو كسر منتهي وليس دائراً).

الأعداد الحقيقية Real Number:

هي الأعداد التى تشتمل على الأعداد النسبية وغير النسبية، وعلى الرغم من تنوع الأسماء، فإن أي عدد حقيقيي يمكن التفكير فيه على أنه أي نقطة تقع في موضع ما على خط الأعداد.

وهناك أنواع أكثر من الأعداد، وعلى سبيل المثـال الأعـداد المركبـة .Complex Numbers

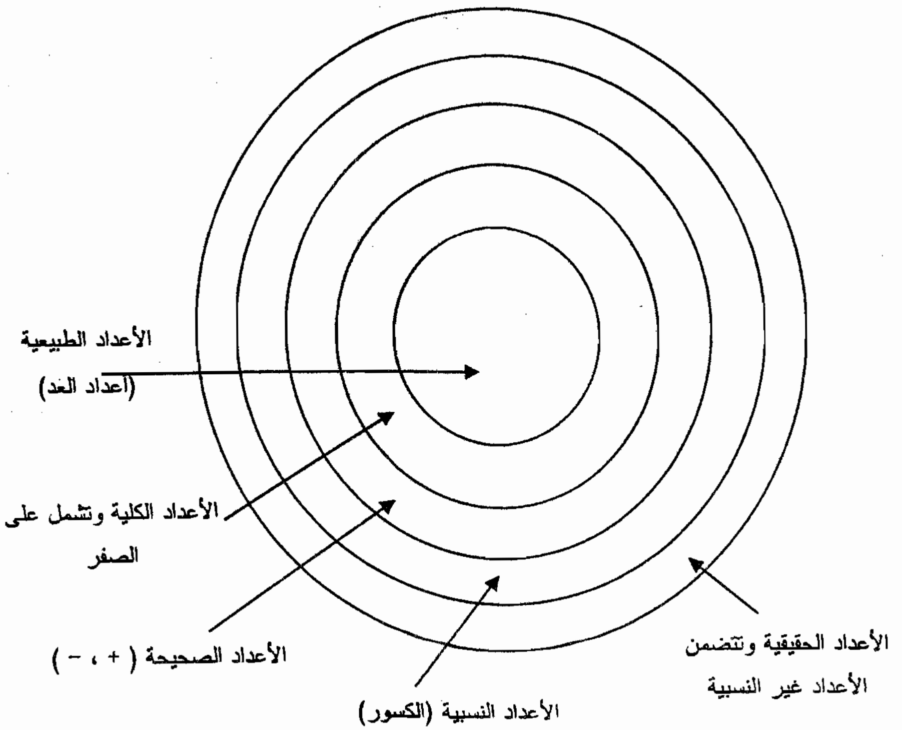
هذه الأعداد تتأسس على ما يسمي بالعدد التخيلي $\sqrt{-١}$ والذي يرمز له بالرمز ت (ت = $\sqrt{-١}$).

ويتكون العدد المركب من جزئين الأول هو العدد الحقيقي والثاني هو ت ، وكمثال على ذلك العدد المركب (٢ + ٣ ت) والعدد المركـب (– ٢ – ٥ ت).

ومع أن هذه الأعداد تبدو غريبة، إلا أن لها تطبيقـات عمليـة فـي الهندسة والعلوم، وتستخدم لإبداع الصور الشهيرة للهيولية والفراكتال.

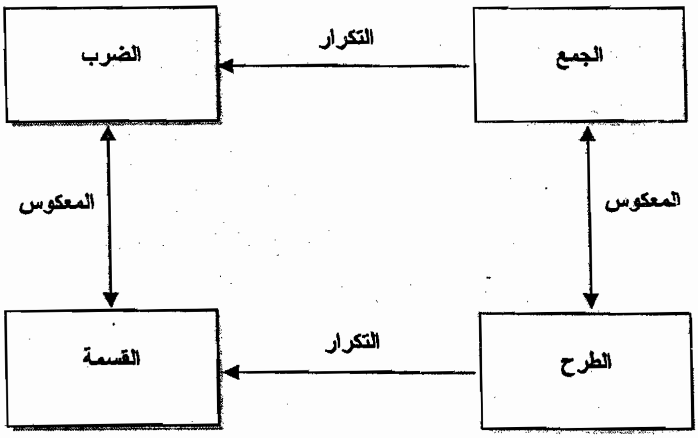
تعقيب:

كل الأعداد التى تم طرحها تشترك في خواص مشتركة (لكـن لهـا خصائص إضافية في ذاتها). والشكل التالي يوضح هذه الأنواع من الأعداد:



عمليات العد Calculation: إن مفاهيم الجمع والطرح والضرب والقسمة هي أفكار مجردة محققة ويوجد بينها أيضاً علاقة متبادلة.

والشكل التالي يوضح هذه العلاقة



وحيث أن المفاهيم السابقة مجردة، فإنها لا يمكن إظهارها بدقة بكلمات أو بأشكال، ومع ذلك فإن هذه المظاهر يمكن أن توضح بواسطة الأمثلة.

بعض مظاهر الاستمتاع بالعدد:

تشير الورقة الحالية في عجالة إلى بعض مظاهر الاستمتاع بالعدد، وبعض الحقائق والطرائف عن الأعداد التي نتعامل معها سواء عند دراستنا للحساب أو في حياتنا اليومية(*).

الصفر: وهو ما يوصف بحق بأنه الاختراع الحديث في تاريخ الرياضيات، ويعد الخوارزمي أول من قدم الرمز (صفر) إلى

(*) لمزيد من التفصيل يرجى الرجوع إلى كتاب طرق تعليم الرياضيات "الإبداع والإمتاع" من تأليف الباحث والصادر عام ٢٠٠٩ عن دار السحاب للطباعة والنشر بالقاهرة.

الغرب، كما أن الكلمة اللاتينية zero اشتقت من الكلمة العربية صفر بمعنى خال.

| ٢ | : - العدد الأولي الزوجي الوحيد.

- العدد الذي إذا جمع إلى نفسه فإن الناتج يساوي حاصل ضرب العدد × نفسه (٢+٢ = ٢×٢)

| ٣ | : - عدد أولي ، ومثلثي أيضاً.

- حساب المثلثات هو فرع من الرياضيات تأسس على قياس المثلثات والتعامل معها.

| ٤ | : عدد مربع، ويساوي ٢×٢ وأيضاً يساوي ٢+٢.

وهو العدد الوحيد الذي عدد أحرف الكلمة المعبرة عنه بالإنجليزية (four) يساوي قيمته.

| ٥ | : - عدد أولي وفردي.

الصلوات (خمس) والحواس (خمس) والحلقات الأولمبية (خمس).

| ٦ | : عدد تام (مجموع عوامله يساوي العدد نفسه).

| ١٠ | : أساس نظامنا العدي (النظام العشري).

| ١٢ | : ١٢ شهر في السنة، ١٢ بوصة في القدم، الساعة الثانية عشر هي منتصف النهار وأيضاً هي منتصف الليل.

| ٢٨ | : - هو عدد أيام شهر فبراير في السنوات البسيطة.

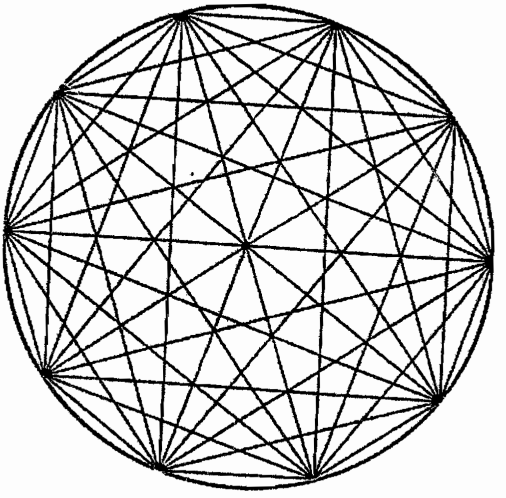
- عدد تام (مجموع عوامله يساوي العدد نفسه).

| ٣٤ |: هو مجموع أعداد كل صف وكل عمود وكل قطـر في المربع السحري من الرتبة الرابعة التي توضع في خانات الأعداد من ١: ١٦ وفقاً لترتيب معين.

| ٤٠ |: – يسمى بالعدد النجمي Star Number.

– هو بطل قصة شعبية متداولة في التراث الشعبي للشعوب السابقة هي قصة على بابا والأربعين حرامي.

| ٤٥ |: عند وضع ١٠ نقاط على أبعاد متساوية على محيط دائرة، وتوصيل كل الخطوط الممكنة بين النقاط العشر ينتج ما يسمى نمط الوردة السحرية (انظر الشكل).



| ٦٠ |: – في كل دقيقة ٦٠ ثانية وفي كل ساعة ٦٠ دقيقة.

– الدرجة = ٦٠/ ، الدقيقة = ٦٠//.

– كل زاوية داخلة في △ المتساوي الأضلاع قياسها ٦٠ °.

– ٦٠ هو أساس نظام العد الستيني وهو سهل الاستخدام، ويتم توظيفه في مسائل الكسور والقيمة المكانية.

٦٩ : – هو العدد الوحيد الذي مربعه ومكعبه يستخدمان معاً كل الأرقام من صفر إلى ٩ ($٦٩^٢$ = ٤٧٦١، $(٦٩)^٣$ = ٣٢٨٥٠٩).

– تم تسجيل العدد ٦٩ كأكبر عدد من المواليد لامرأة واحدة، وهي سيدة روسية عاشت في القرن الثامن عشر الميلادي، ووضعت ١٦ زوجاً من التوائم ١٦×٢=٣٢، ثلاث توائم سبع مرات ٣×٧=٢١، وأربع توائم أربع مرات ٤×٤ = ٣٢، وهذا يعني ٣٢+٢١+١٦ = ٦٩ مولوداً (ما شاء الله).

١٠٠ : – ١٠٠° درجة غليان الماء.

– العدد ١٠٠ يساوي مجموع الأعداد الأربعة المكعبة الأولى.

$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣$ = ١ + ٨+٢٧+٦٤=١٠٠.

مزيد من الأعداد:

العدد ط: وينسب إلى العالم الرياضي المسلم غياث الدين الكاشئ الذي قام بحساب النسبة بين محيط الدائرة وقطرها، والذي يطلق عليه ط أو π.

وقد أعطى الكاشى قيمة ط لستة عشر رقماً عشرياً، ولم يسبقه أحد في إيجاد قيمة ط بهذه الطريقة.

الأعداد المتحابة: كل عددين يقال لهما متحابان إذا كان مجموع القواسم التامة لكل منها يساوي الآخر. وكمثال فإن العددين ٢٢٠، ٢٨٤ متحابان.

الأعداد هندسية الشكل: هي الأعداد المثلثة والمربعة والمخمسة والمسدسة والمسبعة والمثمنة وجميعها يمكن تمثيلها بأشكال هندسية.

نظام الترقيم على حساب الجمل:

وهي فكرة كانت تستخدم قديماً في كثير من الثقافات ومنها الثقافة العربية، وكانت تعتمد على أن يوضع لكل حرف أبجدي عدد يدل عليه.

فكانت الحروف الأبجدية تمثل رموزاً عددية في نفس الوقت.

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠
غ								
١٠٠٠								

قصص أبطالها الأعداد من صفر إلى ٩:

مثال: قصة بطلاها العددان ١١، ٩١

- خذ عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام وأضربه في ١١ ثم اضرب الناتج في ٩١ ولاحظ ما سوف تحصل عليه.
- فليكن العدد الذي تم اختياره هو ١٢٣

١٢٣

× ١١

١٣٥٣

× ٩١

١٢٣١٢٣

لاحظ أن العدد الناتج هو عبارة عن العدد ١٢٣ مكرراً مرتين.

- كرر العمل مع عدد آخر جديد، وليكن العدد ٩٩٩.

٩٩٩

× ١١

١٠٩٨٩

× ٩١

٩٩٩ ٩٩٩

وهناك قصص أخرى كثيرة قد لا يتسع المجال لذكرها.

بعض مظاهر الجمال الرياضي:

متتابعة الأعداد الفيبوناسية The Fibonacci Numbers

٠، ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ٣٤، ٥٥، ٨٩، ١٤٤

وأهم خواصها:

- النسبة الذهبية Golden Ratio وهي عدد غير نسبي يساوي تقريباً ١,٦١٨.
- تظهر هذه النسبة في أبعاد أهرام الجيزة وأوراق البردي، وأطلق عليها الفلاسفة الأغريق اسم القطاع الذهبي، وصاغها إقليدس على النحو التالي: النسبة بين الجزء الأصغر والجزء الأكبر تساوي النسبة بين الجزء الأكبر والكل، وترجمة ذلك هو متتابعة فيبوناسي (٥، ٨، ١٣، ٢١، ....) حيث يلاحظ أن $\frac{٥}{٨} = \frac{٨}{١٣}$، $\frac{٨}{١٣} = \frac{١٣}{٢١}$ وهكذا.

المحور الرابع: توضيح مظاهر الاستمتاع بالهندسة:

تلعب الهندسة دوراً كبيراً في موضوعات الرياضيات المدرسية، ويظهر ذلك بجلاء عند تدريس خط الأعداد، واستخدام المناطق والأشكال الهندسية لتطوير معنى العدد الكسري والحساب باستخدام الكسور، والصفوف المستطيلة لتدريس خواص الأعداد الطبيعية، وتعيين نقطة بواسطة زوج مرتب من الأعداد الحقيقية بما يظهر ارتباط الجبر بالهندسة، وتصوير البيانات هندسياً باستخدام الرسوم البيانية بما يساعد على تفسير وحسن فهم الإحصاء، وإظهار دور الأشكال الهندسية والنماذج في تدريس المنطق ومهارات التصنيف، بالإضافة إلى دورها في تنمية مفاهيم التفاضل وعلاقة المشتقة الأولى بميل المماس المنحنى الممثل للدالة، وتصور التكامل على أنه المسافة الواقعة تحت المنحنى.

وتعد الهندسة أداة للتسلية، وفترة للراحة الذهنية من روتين المسائل الحسابية، فالأنشطة المتصلة بالهندسة تحافظ على الاستمتاع بالرياضيات.

كما يمكن ملاحظة أن أطفال المدارس الذين لديهم ضعف في القدرات الأكاديمية، ولا يهتمون كثيراً بدروس الرياضيات، وتوجد لديهم مظاهر الإنهاك عند دراستهم لها، هؤلاء الأطفال أنفسهم يظهرون توهجاً وحماساً خلال دراستهم لوحدة الهندسة ضمن مقرر الرياضيات.

ويتطرق الباحث في هذا المحور الأخير من الورقة إلى بعض مظاهر الاستمتاع بالهندسة، والتي سوف تجهز لمتعلمي الرياضيات ومعلميها فرصة الحصول على الأمثلة والمواقف التي تتيح رؤية الجمال الرياضي والبرهان البارع، وتتيح لهم متعة الاكتشاف، وتعرف البراهين المختلفة التي وصل عددها إلي المئات في إحدى النظريات التي سنعرض لها في هذا المحور "نظرية فيثاغورث"، ورؤية بعض الهندسات التي تقف جنباً إلى جنب مع هندسة إقليدس التي احتلت عرش الهندسة حتى بداية الألفية الثالثة ، وسوف يعرض الباحث بعض الأفكار المتصلة بالهندسات الاإقليدية، ثم يعرض لاحدى الهندسات الجديدة التى يطلق عليها اسم الهندسة الكسرية أو هندسة الفراكتال، والتي تعد أحدث أنتاج للهندسة في نهاية القرن العشرين، وهكذا فإن الاستمتاع بدراسة الهندسة بدأ مع الهندسة الاإقليدية التى كانت نظرة فيثاغوث التى كانت أهم أعمدتها، والتى امتد شهرتها إلى أكثر من الفين وخمسمائة عام وتواصل مع الهندسات الاإقليدية، ثم أمتد حتى ظهرت هندسة الفتافين (الكسريات) في نهاية سبعينات القرن العشرين، وأمتد الاهتمام بها في الثمانينات والتسعينات من هذا القرن حتى بدأ الاهتمام بإدراجها ضمن برامج إعداد المعلم في بداية الألفية الثالثة.

أولاً: نظرية لها تاريخ:

هناك موضوع في الرياضيات المدرسية اكتسب مكانته في المقرر بسبب قيمته الثقافية، وهو بإجماع المهتمين بالرياضيات "نظرية فيثاغورث.

وهناك أسباب قوية لهذه المكانة يمكن إجمالها فيما يلي:

١- لأن نظرية فيثاغورث تحتل مركز الاهتمام في تاريخ الهندسة النظرية، وامتدت شهرتها لأكثر من ألفين وخمسمائة عام.

٢- لأن لهذه النظرية تطبيقات فورية وممتدة تستخدم لحساب الأبعاد في الهندستين المستوية والفراغية، كما يمكن بواسطتها ربط الدراسة النظرية بالقيمة التطبيقية.

٣- لأن نظرية فيثاغورث ليست مستعصية علي الفهم، ويمكن للكثيرين استخدامها دون مساعدة.

٤- لأنها أحد المعالم الباقية من كل تاريخ الرياضيات، ليس فقط بسبب بساطتها وعموميتها وجمالها الحقيقي، ولكن لأنها تعد أيضاً مصدر إلهام للرياضيات العالية.

٥- لأنها تجهز فرصاً لانظير لها في الرياضيات المدرسية، لرؤية الحدود القصوى للبراهين التي تمكن التوصل إليها لنظرية واحدة في الرياضيات، ويظهر ذلك بوضوح فيما عرضه لوميز Lomis في كتابه The Pythagorean proposition من براهين مختلفة لنظرية فيثاغورث بلغ عددها ٣٧٠ برهاناً مقسمة إلى أربعة أنماط رئيسية، وبعض هذه البراهين يتم بواسطة المساحة، والبعض الآخر باستخدام هندسة التحويلات، وهذا العدد المتنوع من البراهين يندر وجوده في مجالات عديدة للرياضيات.

٦- لأنها تشجع التلاميذ على تكوين وفحص تنوع من الأساليب المتعددة لموضوع رياضي واحد.

٧- لأنها تنمي في التلاميذ روح الصبر والمثابرة والبراعة والتصور والابتكار عند قيامهم ببرهنة النظرية بوسائل متعددة.

٨- لأنها تتيح للمعلم فرصة تجهيز مجال واسع من الإمكانيات في مستويات متعددة، بعضها في شكل إثباتات أو براهين بسيطة، أو إثباتات تجريبية، وبعضها في شكل توسيع أو امتداد بالنظرية تجاه المثلثات غير قائمة الزاوية والمساحات غير المربعة، وتجاه حساب المثلثات والهندسة المجسمة، والجبر ونظرية الأعداد.

٩- لأن نتائج هذه النظرية لا تكمن فقط في النتائج التي نحصل عليها، وإنما في الأسئلة والتخمينات والتجارب والتعميمات والبراهين والطرق التي يتم بها التوصل إلي النتائج.

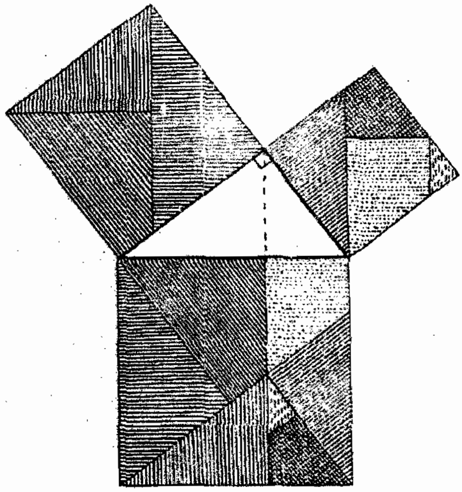
١٠- وأخيراً لأن هذه النظرية تتفق مع طبيعة الرياضيات، والتي تظهر للمعلمين والتلاميذ عن طريق تطبيقها في الأنشطة العقلية والتطبيقية والاجتماعية والشخصية، التي تعد ضرورية كحل مناسب لما نواجهه من مشكلات.

مداخل برهان نظرية فيثاغورث:

١- مدخل التقسيم:

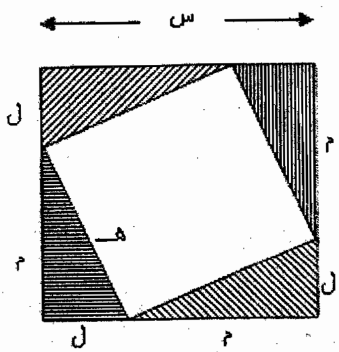
هذا المدخل يعتمد على الرسم، وعلى تقسيم المربعين المنشأين على ضلعي المثلث القائم الزاوية، والمربع المنشأ على الوتر إلى أقسام بنظام معين، ومن ثم إثبات المطلوب في النظرية عن طريق ملاحظة الأشكال الناشئة عن التقسيم.

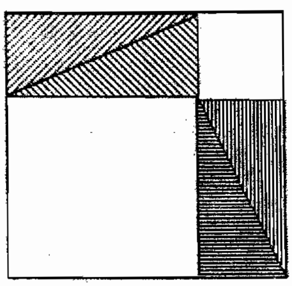
والأشكال التالية توضح البرهان باستخدام مدخل التقسيم:



٢ – مدخل المربع داخل المربع:

أنظر إلى الشكل التالي:





هذا الشكل يظهر المدخل المسمي (المربع داخـــل المربـــع) والـــذي تستخدمه العديد من الكتب المدرسية المعاصرة مثل كتب المشروعات العالمية لتدريس الرياضيات، ويبدو أن هذا المدخل هو الأكثر ذيوعاً وانتشاراً، وقـــد استخدم بهاسكارا Bhaskara الهندى نسخة مشابهة لهذا المدخل في القـــرن الثاني عشر الميلادي.

ثانياً: قصة الهندسات اللاإقليدية:

تعد قصة الهندسات اللاإقليدية أحد أروع ما عرفة تاريخ الرياضيات، ويحكي محمد ثابت الفندى (١٩٧٨)، Hodgkin., L (2005) هذه القصة التى تعد الثورة الجديدة التي ظهرت في دنيا الهندسة منذ نحو قرن ونصف من الزمان، والتي كان لها أثر علمي بالغ الأثر مثله مثل غيره من الأحداث العلمية الكبرى التي فاقت كل التصورات.

ولابد أولاً من التسليم بأن الهندسة – بكل ما تملكه من صدق – تعد من المواد التي يدرسها عموماً معظم الناس ولكل الناس، كما أنها تملك الواقعية التاريخية عندما تظهر أمام دارسيها كأشياء يتصورها العقل. إن القصة الكلاسيكية المثيرة في تاريخ الرياضيات تحكي منشأ وأصل الهندسات اللاإقليدية، والتي يراها البعض جزءاً من بزوغ شمس الرياضيات الحديثة المجردة التي حلت محل الرياضيات التقليدية والتي هي أيضاً في صيغنا المعتادة شيئاً يتصل بالأشياء وبالعالم.

القصة – بشكل تقليدي – تحكي لنا كإحدى العمليات الخاصة بالاكتشاف، فقد كانت هناك المشكلة الخاصة بالمسلمة الخامسة من مسلمات إقليدس والمسماة بمسلمة التوازي، ثم اختراع الهندسات اللاإقليدية بواسطة لوباتشفسكي وبولياي في عشرينات القرن التاسع عشر، والتي ينظر إليها البعض على أنها تحفة فنية على مسرح التاريخ.

وقد ظهرت انتقادات لهذه الهندسات بعد ما يقرب من مائة عام، في محاولة لكي تروي لنا القصة بشكل مختلف أو تروي قصة مختلفة تماماً.

لكن الحقيقة أنه باختراع هذه الهندسات الجديدة، اكتشف الرياضيون طرقاً مختلفة تماماً لأداء الرياضيات (التي تعني في هذه الحالة الهندسة)، والتي تضاف إلي الرياضيات القديمة وتحل محلها، وتعطينا منظوراً جديداً

مفاده أن الهندسة الإقليدية (العجوز) هي حالة خاصة من تلك الهندسة الجديدة.

ورغم أن نظرية فيثاغورث والقضايا المتصلة بالمثلثات المتطابقة لا تزال تمثل جزءاً من الثقافة العامة لدارسي الرياضيات، إلا أن هناك بعض القضايا النظرية المعرفية تميل إلي أن تكون ملتبسة، وقد يأخذ من يدرس الرياضيات برهة من الوقت لكي يحصل على الإجابة عن سؤالين هما:

١- ما الذي تقوله الهندسة وما هو موضوعها؟

٢- كيف نعرف ما إذا كانت نتائجها صحيحة أم لا؟

ولا شك أن الإجابة سوف تتأثر بالطبع بمستوى تعليم الفرد وباعتقاداته الشخصية أيضاً.

ولنعد مرة أخرى إلي القصة التي بدأنا روايتها – قصة الهندسات اللاإقليدية، وبالنظر إلي النص الأبسط، الذي لا يزال له أيضاً تداول واسع، وله أيضاً نصيبه من السهولة والبساطة، هذا النص سارت خطواته على النحو التالي:

١- من بداية ظهور الهندسات الإقليدية – وربما في وقت مبكر عن هذا ظهر شكل من عدم الرضا عن هذا النظام الدقيق كما يبدو، وتركز على ما يسمي بمسلمة التوازي، والتي تنص على أنه (إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين بحيث كان مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين الموجودتين في جهة واحدة أقل من قائمتين، فإن المستقيمين المذكورين أو امتداديهما يتلاقيان). والصيغة الأخرى (وربما هي الأسهل للفهم) هي مسلمة بلايفير Playfaie's Axiom والتي تنص على أنه من نقطة خارج مستقيم معلوم يوجد خط مستقيم واحد وواحد فقط يمر بهذه النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

٢- لفترة امتدت نحو ألفي عام كانت هناك محاولات لبرهنة مسلمة التوازي، وقد سجلت هذه المحاولات باسم كل من بـروكليس Proclus (القـرن الخامس) وثابت بني قرة (القرن التاسع)، وابن الهيثم (القـرن العاشـر) وعمر الخيام (القرن الحادي عشر) ونصير الدين الطوسي (القرن الثالث عشر)، إضافة إلي محاولات بعض الكتاب المعروفين جيداً وغيرهم من المغمورين.

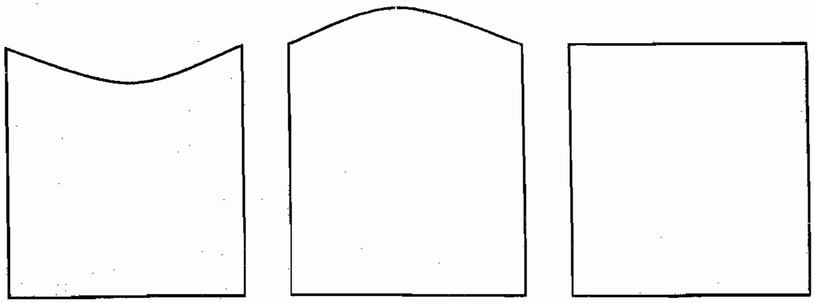
والملاحظة الجديرة بالاهتمام، أن مسألة المتوازيات لم يكـن ينظـر إليها على أنها سؤال مفتاحي في الرياضيات، وإن كان من الواضح أيضاً أنها كانت أكثر أهمية بالنسبة للعلماء العرب.

٣- البرهان الأكثر جدية، والأخير داخل السياق الخاص بالهندسة الكلاسيكية يعود إلي القس الإيطالي جيرولامو سـاكيرى Gerolamo Saccheri (المتوفي عام ١٧٣٣)، والذي جاء بما توهمه برهاناً لسـملة التـوازي والذي كان إيذاناً بنشأة هندسات لاإقليدية، ومجمل برهانه يـدور حـول الفكرة التالية: إن عدم استطاعة إثبات بطلان تلك المسملة يتضمن فـي ذاته صحتها.

وقد نشر ساكيرى برهانه الذي ربما يعود بشكل أساسي إلي نصـير الدين الطوسي، وبدأه بتشييد شكل رباعي أ ب جـ د فيه الزاويتان ب ، جـ قائمتان، والضلعان أ ب ، جـ د متطابقان. إنـه مـن السـهل إظهـار أن الزاويتين أ ، د متساويتان، وبفرض التسليم بمسلمة التوازي يمكن استنتاج أن هاتين الزاويتين تكونان قائمتين، لكنه بغير ذلك لا يمكن التوصل إلـي هـذه النتيجة، فإذا لم تكن الزاويتين قائمتان فإنهما تكونان حادتين أو منفرجتين.

إن الفروض الثلاثة (فرض الزاوية القائمة، فرض الزاوية الحـادة، فرض الزاوية المنفرجة) تقابل القول بأن مجموع زوايـا المثلـث يسـاوي قائمتين أو أقل من قائمتين أو أكثر من قائمتين علـى الترتيـب، ويـرفض

ساكيرى الفرضين الأخريين لتناقضهما مع المسلمات الإقليدية الأخرى مستبقياً الفرض الأول ناظراً إلي أن استحالة إثبات بطلانه يتضمن في ذاته صحة المسلمة المذكورة.



فرض الزاوية القائمة   فرض الزاوية الحادة   فرض الزاوية المنفرجة

(الفروض الثلاثة لساكيرى)

إن مجمل القول في برهان ساكيرى هو أنه اعتقد في قوة (برهان الخلف) فتصور فكرة محاولة البرهان على صدق قضية المتوازيين باستنباط تناقض بين إنكار هذه القضية وقبول المسلمات الإقليدية الأخرى، فبرهان الخلف إذن هو عدم استطاعة استنتاج نقيض المسلمة الخامسة من المسلمات والنظريات المقبولة الأخرى.

وبغض النظر عن قيمة هذا البرهان السلبي الذي لا يبرهن القضية ذاتها، وإنما فقط استحالة نقيضها أو بالأحرى استحالة بطلانها، فإن قيمة هذا البرهان من وجهة النظر الحديثة أنه أتاح فرصة لتكوين فروض ثلاث تقابل على الترتيب هندسة إقليدس التقليدية وهندسة لوباتشفسكي وهندسة ريمان، وهاتان الأخيرتان هندستان جديدتان من المجموعة التي يطلق عليها اسم الهندسات اللاإقليدية Non Educlidean Geometrys

٤- بعد زخاري، استمرت محاولات البرهنة، وبذل الكثيرون جهداً منقطع النظير لإثبات صحة المسلمة الخامسة من أمثال لاجندر ودالمبير

ولاجرانج، وهذا الأخير تقدم عام ١٨٠٠ م ببحث إلي الأكاديمية الفرنسية فيما توهمه برهاناً لها، حتى إذا هم بإلقائه اعتذر بأنه لابد وأن يعيد النظر فيه، وشهد هذا كله على فشل كل المحاولات التي بذلت للبرهنة على صفحة تلك المسلمة، وكان لابد لهذا الفشل المتكرر أن يؤدى آخر الأمر إلى أن يفترض الرياضيون إمكانية قيام هندسة غير إقليدية تكون فيه المسلمة المذكورة باطلة.

وفي عام ١٨١٦ أتم كارل جاوس (Gauss) الألمانى كتاباً لم ينشره خوفاً من صدمة الرأى العام أثبت فيه وجود تلك الهندسة اللاإقليدية، ولكن الرياضى الروسي لوبا تشفسكي الأستاذ بجامعة قازان كان أول من نشر أبحاثة في تلك الهندسة عام ١٨٢٨ فعرفت هذه الهندسة باسمه (وهي التي اكتشفها جاوس من قبل) والتي تقابل الفرض الثاني من فروض ساكيرى.

وفي نفس التوقيت تقريباً، وبدون أى اتصال بين العالم الروسي لوباتشفسكي والعالم الإلماني بولياى توصلا إلى نفس النتائج.

وقد طبع الاثنان نتائجهما في مكانين مختلفين، وبرهن كل منهما بعض الخواص الهامة وغير المتوقعة للهندسات اللاإقليدية المتغيرة، وذهبوا بعيداً تجاه جعلها دراسة ممتعة ومشوقة في مجالها الخاص، ويعد ذلك ثورة حقيقية في مجال الهندسات اللاإقليدية.

٥- لم يمض غير قليل من الوقت حتى اكتشف ريمان عام ١٨٥٤ هندسة أخرى لاإقليدية على أساس الفرض الثالث من فروض ساكيرى يقبل فيها على خلاف إقليدس أن المستقيم لا يمتد إلى ما لا نهاية، وإنما هو ينتهي حتما (وهذا عكس المسلمة الرابعة عند إقليدس والتي تقبل امتداد الخط إلى ما لا نهاية)، كما يقبل فيها أيضاً أن كل مستقيمين على سطح واحد لابد أن يلتقيا في نقطتين، وبالتالي فإنه لا توجد مستقيمات متوازية بالمعني الإقليدى، وعلى العكس من ذلك تقبل هندسة لوبا تشفسكي عدداً

لا ينتهي من المستقيمات المتوازية التي تمر كل منها بنقطة واحدة خارج مستقيم ما.

إن الأوراق التي تركها ريمان عام ١٨٥٤ ونشرت في السنوات التالية بواسطة هلمهولتز Helmholts أظهرت التنوع الواسع من الهندسات، والذى تابع العمل فيه بلترامي وبوانكاريه وآخرون.

٦- نصل الآن إلى الفصل الأخير في هذه الرواية الشائقة (قصة اكتشاف الهندسات اللاإقليدية) والتى تتتابع القضايا أو النظريات فيها تتابعاً محكماً كما هو الشأن في هندسة إقليدس، ولكنها بالطبع نظريات مختلفة فيما بينها بالنسبة للهندستين الجديدتين، كما أنها تختلف جميعها عن نظريات الهندسة الاقليدية المألوفة لنا.

والآن نحن أمام ثلاث هندسات كل واحدة منها تقابل فرضاً من فروض ساكيرى، وخواص تلك الهندسات هي:

أولاً: أن مجموع زوايا المثلث تساوى أو تقل عن أو تزيد علي قائمتين على الترتيب.

ثانياً: أن كلاً منها تنطبق على أسطح انحناء كل سطح منها كما يقول أصحاب الهندسة أنحناء ثابت (Constant)، وهذا شرط ضرورى لانتقال الأشكال فوق اسطحها انتقالاً حاداً دون تشويه، وهذا الانحناء يكون (صفراً) عند إقليدس، و(سالباً) عند لوباتشفسكي، و(موجباً) عند ريمان على الترتيب.

أن العلاقة بين هذه الهندسات توضحها تلك المقارنة التي عقدها بلترامي Beltrami والتي تتضح في الجدول التالي:

جدول يوضح

الفروق بين الهندسة الأقليدية والهندسات اللاإقليدية

رقم	الهندسة	السطح	الانحناء	مجموع زوايا المثلث
١	إقليدس	مسطح	صفر	قائمتان
٢	لوبا تشفسكي	مسطح يشبه الكرة (متغير) Pseudo – sphere	أقل من صفر (سالب)	أقل من قائمتين
٣	ريمان	كروى (محدب)	أكبر من صفر (موجب)	أكبر من قائمتين

وبعد: لقد ثبت من خلال الاستعراض السابق لقصة الهندسات اللاإقليدية أن المسلمة الخامسة لإقليدس والمسماة بمسلمة التوازي مستقلة عن بقية مسلماته، بحيث إذا ضم بديل أو أكثر إلى المسلمات الأخرى تكونت هندسات مختلفة متتابعة القضايا أو النظريات، وهذا تغيير جوهرى غير مسبوق في أسس الهندسة ملئ باحتمالات أخرى للتغير، ذلك لأنه قد نشأ بالطبع سؤال جديد وهو: هل يمكن إحداث تغيرات أخرى في أسس الهندسة بحيث ينشأ مزيد من الهندسات المتسقة القضايا؟ مثلاً هل يمكن وضع بديل أو أكثر لمسلمة أو مسلمات أخرى؟ أو هل يمكن قبول مسلمات جديدة فتنشأ هندسات جديدة؟ ذلك هو السؤال الذي سيطر على كل الأبحاث الجديدة في الهندسة والذى لقي جواباً إيجابياً أيضاً.

ثالثاً: هندسة الفراكتال Fractal Geometry

تشير نظلة خضر إلي أن التفكير الرياضي الابتكاري المتجدد قد أنتج هندسة معاصرة تتسم بسمات متطلبة لتطوير الرياضيات المدرسية للقرن الحادي والعشرين، وذلك لكونها أكثر حيوية وأكثر واقعية وأكثر إتاحة وأكثر معلوماتية وأكثر حداثة. بالإضافة إلي أنها تمتلك صفات يمكن

استغلالها لتنمية النواحي الابتكارية للمتعلم، ويرجع ذلك لروابطها بالطبيعة والفن والتكنولوجيا المتقدمة، والعلوم الأخرى المعاصرة، وأيضاً لجذورها في أعمال ابتكارية خلاقة لرياضيين حديثين.

هذه الهندسة هي هندسة الفراكتال Fractal Geometry والتي قد تسمى أيضاً (هندسة القتاقيت أو الكسريات). والتي تبلورت في نهاية السبعينات من القرن الماضي، ثم بدأ الاهتمام بها في الثمانينات والتسعينات، خاصة وأن نموها قد ارتبط بالهيولية (أو الفوضى) Chaos التي أحدثت ثورة علمية جعلت من النظرية النسبية نظرية عتيقة. بالإضافة إلى أنها وجهت الاهتمام بدقائق الأمور والتصرفات الديناميكية اللاخطية التي حلت مشكلات علمية وتكنولوجية عصرية كان يتجاهلها العلماء والرياضيون من قبل.

نشأة هندسة الفراكتال:

عندما كان ماندليروت Mandlbrot (البولندي الأصل والفرنسي المولد) يجلس على شاطئ إنجلترا، وأثناء استمتاعه بالبحر وأمواجه، تجول ببصره نحو الشاطئ ويبهره تعرجات البحر وخلجاته، وتضاريسه الصخرية المتباينة.

وقد أثار الشاطئ المتعرج مشكلة في خاطره: ما طول شاطئ إنجلترا؟ وقد ذكره الشاطئ المتعرج بالأشكال المتشابهة ذاتياً Self similarity وهذا الشكل ببساطة هو شكل يتكون من أشكال أصغر منه بمقاييس Scales مختلفة مثل فرع شجرة وتفرعاتها، أو نهر بروافده الموجودة في الطبيعة، وكذا الزخارف الرياضية الفنية منذ آلاف السنين (ومنها المصرية القديمة والإسلامية).

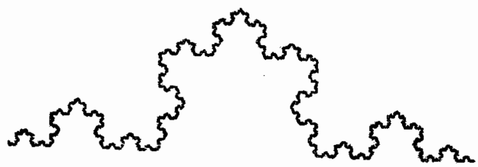
وكان ماندلبروت عالماً رياضياً تدرب على الرياضيات الشكلية لمدرسة بورباكي، وجوليا وكوخ وبينو، والمتعلقة بأفكار وأشكال قدموها، ولاحظ أنها تتضمن أشياء ذات تشابه ذاتي لأي عدد من المقاييس.

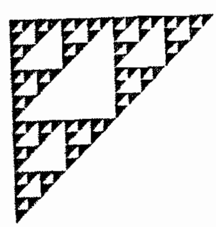
تعريف الفراكتال:

تعرفه **نظلة خضر** بأنه الشكل الهندسي (الخشن أو ذو الانكسارات) الذي يمكن تقسيمه إلي أجزاء كل منها (على الأقل تقريباً) هو تصغير للشكل لعديد من المقاييس.

كما توضح أن لهندسة الفراكتال تطبيقات في هندسة الاتصالات وفي علوم الأرصاد الجوية، كما أنها تستخدم في العلوم الطبيعية والعلوم الهندسية وعلى جانب آخر تستخدم في السينما والتليفزيون لعمل مناظر طبيعية فرضية خيالية وتستخدم كخلفية لأفلام الخيال العلمي والقصص الخيالية. إن التأمل في الطبيعة، الأمواج في حركاتها المنتظمة والفوضوية (الهيولية)، الشاطئ بتعرجاته غير المنتظمة والمتشابهة، الثقافة الرياضية من القديم والحديث التي اخترعها الرياضيون في العصور المختلفة، التعمق الرياضي في التوبولوجي ونظرية الدوال الهندسية وتكامل ليبيه وغيرها، أنتج هندسة جميلة مملوءة بالحياة والجمال تعكس الطبيعة وتسهم في تفسيرها وفي حل المشاكل العصرية، ويحتضن نموذجها الفني الرياضي القديم والحديث، ولها تطبيقات حيوية في الأنظمة الديناميكية والتكنولوجية والحيوية والطبيعة. وهذا كله يعكس وجهة نظر هيرش Rubin Hersh حول الرياضيات الإنسانية، فهي من صنع الإنسان، اجتماعية، متغيرة، تعكس النمو الحضاري، تؤثر فيه وتتأثر به، وهي دائماً تصحح وتطور نفسها، وكما يقول ماندلبروت "لماذا توصف الهندسة الإقليدية بأنها جافة وباردة؟" إن السبب يكمن في عدم قدرتها

على وصف شكل السحاب أو الجبال أو الشاطئ أو الشجرة، السحب ليست أشكالاً كروية، والشواطئ ليست دوائر، ولا البرق يسير في خط مستقيم. وتظهر الأشكال التالية مجموعة من الفراكتالات، ويظهر بعضها عدداً كبيراً من المقاييس (من التصغير والتكبير)، كما تنسب بعض الفراكتالات الشهيدة إلي عدد من الرياضيين الذين قدموها، مثل فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج Koch Snow Curve ومجموعة جوليا التي يتوه الخيال والعقل في روعتها وجمالها، وتظهر شكلاً معقداً يمكن أن تناظر منه أشكالاً في الطبيعة وفي الرياضيات.



وتشير نظلة خضر إلي أن هندسة الفراكتال بما تتمتع به من خصائص وملامح يمكن أن يكون لها دور رائد في جعل الرياضيات المدرسية في القرن الحادي والعشرين أكثر حيوية ومعلوماتية وواقعية وإتاحة وحداثة.

فهي أكثر حيوية لأنها أقرب للطبيعة والحياة، وتتميز بالديناميكيـــة، وأكثر إنسانية أيضاً.

كما أنها أكثر معلوماتية من خلال إبراز ارتبـــاط أفكارهـــا وتطبيقاتهـــا بالكمبيوتر من خلال الإمكانيات المتقدمة للكمبيوتر كنظام معلوماتي، حيث يستطيع الكمبيوتر إظهار الفراكتالات البديعة، وعمل برامج لإنتاج الفراكتال.

وتسهم هندسة الفراكتال في جعل الرياضيات المدرسية أكثر إتاحة حيــث يوجد أكثر من ١٨٠٠ موقع على الإنترنت يخص هندسة الفراكتال منهـــا مئـــات الكتب.

وأخيراً، فإن هندسة الفراكتال تجعل الرياضـــيات المدرســـية أكثـــر حداثة، عن طريق إدخال أجزاء منها في المقررات الدراسية، أو من خـــلال الروابط بموضوعات ذات علاقة ببعض أفكارها، أو تقديم مفاهيمها وأشكالها كنشاط ترويحي مصاحب أو كنشاط ثقافي حر.

قائمة المراجع

١- رفعت محمد حسن المليجي (١٩٨٦): مداخل مختلفة لتدريس نظرية فيثاغورث لتلاميذ الحلقة الثانية من التعليم الاساسي، المجلد العلمية لكلية التربية جامعة أسيوط العدد الثانى.

٢- ـــــــــــــــ (٢٠٠٦): طرق تعليم الرياضيات (النظرية والتطبيق)، الطبعة الأولى، الرياض، مكتبة الرشد.

٣- ـــــــــــــــ (٢٠٠٩): طرق تعليم الرياضيات (الإبداع والامتاع)، الطبعة الأولي، القاهرة دار السحاب للطباعة والنشر.

٤- محمد ثابت الفندى(١٩٨٧): فلسفة الرياضية، الإسكندرية، دار المعرفة الجامعية.

٥- نظلة حسن أحمد خضر(٢٠٠٤): معلم الرياضيات والتجديدات الرياضية – هندسة الفراكتال وتنمية الابتكار الهندسي لمعلم الرياضيات، القاهرة، عالم الكتب.

٦- وليم عبيد (١٩٩٨): "رياضيات مجتمعية لمواجهة تحديات مستقبلية – أطار مقترح لتطوير مناهج الرياضيات مع بداية القرن الحادي والعشرين" مجلة تربويات الياضيات – الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، المجلد الأول، ديسمبر ١٩٩٨.

٧- وليم عبيد (٢٠٠٤): تعليم الرياضيات لجميع الأطفال في ضوء المعايير وثقافة التفكير، الطبعة الأولي، عمان، دار المسيرة للنشر والتوزيع.

8- **Cooke, (2007):** Mathematics for primary and Early years, Developing subject Knowleolge, second Edition, London. The open university.

9- **Ediger, M and Digumarth (2007):** Teaching Mathematics Successfully, second Edition, New Delhi, Discovery pubbishing House.

10- **Hodgkin., L. (2005):** History of Mathematics from Mesopotamia to Modernity, First published, Oxford University press.

11- **Loomis, E.S., (1968):**The Pythagorean proposition, second Edition, council of Teachers of Mathematics.

12- **Ryan, j and julian Williams (2007):** Children's Mathematics 4 – 15, Learning form Errors and Misconception, first published, The open university press.

13- **Upitis, R., phiillps, E. and William Higginson. (1997):** Creative mathematics, Exploring children's understanding, first published, London, Routledge.