حاتم طه
0126944555

الجبـــــــــــر

القوى الصحيحة غير السالبة و السالبة في ح

القوى الصحيحة غير السالبة في ح

مراجعة القوى الصحيحة غير السالبة في ن :

نعلم أن : إذا كان : أ عدداً نسبياً ، ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

* $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times \cdots\cdots \times أ$ حيث : أ مكرر كعامل ن من المرات

** $أ^{\text{صفر}} = ١$ حيث $أ \neq$ صفر

فمثلاً : * $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٣} = \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{١٢٥}$ ، $\left(\frac{١}{٥}\right)^{\text{صفر}} = ١$

* $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{\cdots\cdots} = \cdots\cdots$ ، $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\cdots\cdots} = ١$

القوى الصحيحة غير السالبة في ح :

(١) إذا كان : أ ∈ ح ، ن ∈ ص+ فإن :

$أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times \cdots\cdots \times أ$ حيث : أ مكرر كعامل ن من المرات

فمثلاً : * $(\sqrt{٣})^{٥} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٩\sqrt{٣}$

* $(-\sqrt{٥})^{٤} = (-\sqrt{٥}) \times (-\sqrt{٥}) \times (-\sqrt{٥}) \times (-\sqrt{٥}) = ٢٥$

* $(-\sqrt{٢})^{٣} = (-\sqrt{٢}) \times (-\sqrt{٢}) \times (-\sqrt{٢}) = -٢\sqrt{٢}$

(٢) إذا كان : $أ \in ح^{*}$ "ح − { ٠ }" فإن : $أ^{\text{صفر}} = ١$

فمثلاً :

$(-\sqrt{٣})^{\text{صفر}} = ١$ ، $\left(\frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)^{\text{صفر}} = ١$

القوى الصحيحة السالبة في ح

مراجعة القوى الصحيحة السالبة في ن :

نعلم أن : إذا كان : أ عدداً نسبياً لا يساوى الصفر ، ن عددياً صحيحاً موجباً فإن :

$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $أ^{ن} = \frac{١}{أ^{-ن}}$

فمثلا : $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$ ، $(\sqrt{٣})^{-٢} = \frac{١}{٣}$

القوى الصحيحة السالبة في ح :

إذا كان : $أ \in ح^{*}$ ، ن عددياً صحيحاً موجباً فإن :

$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $أ^{ن} = \frac{١}{أ^{-ن}}$

فمثلا :

$(\sqrt{٣})^{-٢} = \frac{١}{(\sqrt{٣})^{٢}} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{(-\sqrt{٢})^{-٣}} = (-\sqrt{٢})^{٣} = -٢\sqrt{٢}$

مثال :

إذا كان : $س = ٢$ ، $ص = \sqrt{٣}$ أوجد في أبسط صورة قيمة :

(١) $س^{-٢} ص^{٤}$ (٢) $[س^{-٢} ص^{٤}]^{-٣}$

الحل

(١) $س^{-٢} ص^{٤} = (٢)^{-٢} \times (\sqrt{٣})^{٤} = \frac{١}{٤} \times ٩ = \frac{٩}{٤}$

(٢) $[س^{-٢} ص^{٤}]^{-٣} = [(٢)^{-٢} \times (\sqrt{٣})^{٤}]^{-٣} = [\frac{٩}{٤}]^{-٣} = \frac{٦٤}{٧٢٩}$

قاعدة هامة :

١ ـ إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : $م = ن$ حيث : $أ \in ح - \{ ٠ ، ١ ، -١ \}$

فمثلا : إذا كان : $(\sqrt{٣})^{س} = ٩$

فإن : $(\sqrt{٣})^{س} = (\sqrt{٣})^{٤}$ ∴ $س = ٣$

٢ ـ إذا كان : $أ^{م} = ب^{م}$ فإن :

* $م = ٠$ حيث : $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$ ، $أ \neq \pm ب$
* $أ = ب$ إذا كان م عدداً فردياً ، $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$
* $|أ| = |ب|$ إذا كان م عدداً زوجياً ، $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$

فمثلا : إذا كان : $٧^{س} = ٥^{س}$ فإن : س = صفر

، إذا كان : $س^{٣} = (\sqrt{٥})^{٣}$ فإن : $س = ٥$

، إذا كان : $س^{٤} = (\sqrt{٥})^{٤}$ فإن : $س = \pm ٥$

٣ ـ إذا كان : $أ^{م} = ١$ فإن : $م = ٠$ حيث : $أ \neq ٠$ ، $أ \neq \pm ١$

فمثلا : إذا كان : $(\sqrt{٧})^{س} = ١$ فإن : س = صفر

مثال :

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في ح :

[١] $(\frac{٥}{٢})^{س+٣} = \frac{٢٥}{٤}$

[٢] $(\sqrt{٢})^{س-٣} = (٢)^{س-٣}$

[٣] $(س - ١)^{٤} = ١٦$

[٤] $(٢)^{س-٣} = ١$

الحل

[١] ∵ $(\frac{٥}{٢})^{س+٣} = \frac{٢٥}{٤}$ ∴ $(\frac{٥}{٢})^{س+٣} = (\frac{٥}{٢})^{٢}$

∴ $س + ٣ = ٢$ ∴ $س = ١$

∴ مجموعة الحل = { ١ }

[٢] ∵ $(\sqrt{٢})^{س-٣} = (٢)^{س-٣}$ ∴ $(\sqrt{٢})^{س-٣} = (\sqrt{٢})^{٢س-٦}$

∴ $س - ٣ = ٢س - ٦$ ∴ $س = ٣$

∴ مجموعة الحل = { ٣ }

[٣] ∵ $(س - ١)^{٤} = ١٦$ ∴ $(س - ١)^{٤} = (٢)^{٤}$

∴ $|س - ١| = |٢|$ ∴ $س - ١ = \pm ٢$

∴ $س - ١ = ٢$ ∴ $س = ٣$ أ؛ $س - ١ = -٢$ ∴ $س = -١$

∴ مجموعة الحل = { ٣ ، −١ }

[٤] ∵ $(٢)^{س - ٣} = ١$ ∴ $س - ٣ = ٠$ ∴ $س = ٣$

∴ مجموعة الحل = { ٣ }

تمارين

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

[١] $(-\frac{٢}{٥})^{٣} = ...$ ($-\frac{٦}{١٥}$ ؛ $-\frac{٤}{١٢٥}$ ؛ $\frac{٤}{١٢٥}$ ؛ $\frac{٦}{١٥}$)

[٢] $٣\frac{٣}{٨} = (....)^{٣}$ ($\frac{٢}{٣}$ ؛ $\frac{٣}{٢}$ ؛ $\frac{٨}{٢٧}$ ؛ $\frac{٢٧}{٨}$)

[٣] $(\sqrt{٥})^{٤} = ...$ (٥ ؛ ٢٥ ؛ ٢٠ ؛ $\frac{١}{٢٥}$)

[٤] $(\sqrt{٥})^{-٤} = ...$ (٥ ؛ ٢٥ ؛ ٢٠ ؛ $\frac{١}{٢٥}$)

[٥] $(\sqrt{٥})^{-٤} \times (\sqrt{٥})^{٤} = ...$ (٥ ؛ ٢٥ ؛ ١ ؛ −١)

[٦] إذا كان : $ص = ٧^{س}$ ، $ع = ٧^{-س}$ فإن : ص × ع = ...
(٧ ، −٧ ، صفر ، ١)

[٧] إذا كان : $س^{٣} ص^{-٣} = ٨$ فإن : $ص^{٢} س^{-٢} = ...$
(٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$)

[٨] إذا كان : $(س - ١)^{صفر} = ١$ فإن : س ∈ ....
(ح ؛ ح − { ١ } ؛ ح − { −١ } ؛ { ١ })

[٩] إذا كان : $(س - ٣)^{صفر} = ١$ فإن : س ≠ ....
(٣ ؛ −٣ ؛ صفر ؛ ١)

[١٠] إذا كان : $\left(\sqrt{\frac{٣}{٥}}\right)^{أ} = \frac{٥}{٣}$ فإن : أ = ...
(−٢ ، ١ ، ٢ ، −١)

[١١] إذا كان : س = ص فإن : $(٦٤ أ^{٣} ب^{٥})^{س - ص} = ...$
(٦٤ ، ١ ، س ، ص)

(٢) أكمل ما يلى :

١ − إذا كان : $٥^{س} = ١٢٥$ فإن : س = ...

٢ − إذا كان : $٣^{س} = ٩$ فإن : $٢^{س} - ١ = ...$

٣ − إذا كان : $٣^{س - ١} = ١$ فإن : س = ...

٤ ـ إذا كان : $٣^{\text{س} - ٣} = ٣^{٥ - ٣\text{س}}$ فإن : س = ٠٠٠٠٠

٥ ـ إذا كان : $٣^{\text{س}} = ٥$ فإن : $٩^{\text{س}} =$ ٠٠٠٠٠

٦ ـ إذا كان : $\text{س} = \sqrt{٧}$ ، $\text{ص} = (\sqrt{٧})^{-١}$ فإن : $\text{س}^{٥٠}\ \text{ص}^{٥٠} =$ ٠٠٠٠٠

٧ ـ إذا كان : $٥^{\text{س} - ١} = ٣^{\text{س} - ١}$ فإن : س = ٠٠٠٠٠

(٣) إذا كان : $\text{س} = \sqrt{٢}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٣}$ أوجد قيمة :

[١] $\text{س}^{-٢}\ \text{ص}^{-٤}$ [٢] $(\text{س}\ \text{ص})^{-٥}$

[٣] $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{-٣}$

(٤) إذا كان : $\text{س} = \frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ص} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ أوجد قيمة :

$٢\text{س}^{٢} + \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + ٤\ \text{ص}^{٢}$

(٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية في ح:

[١] $٢^{\text{س} - ١} = ٣٢$ [٢] $٣^{\text{س} - ١} = ١$

[٣] $٣^{\text{س} - ٣} = \frac{١}{٩}$ [٤] $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣ - \text{س}} = \frac{٨١}{١٦}$

[٥] $٣^{\text{س} - ٥} = ٤^{\text{س} - ٥}$ [٦] $٢ \times ٤^{\text{س} + ٣} = \frac{١}{٣٢}$

[٧] $٢^{\text{س}^{٣}} = (٢٥٦)^{-١}$ [٨] $٤^{\text{س} - ٢} = ٨^{٣\text{س} - ٥}$

[٩] $١٣^{\text{س}^{٢} + ١٠\text{س} + ٢٥} = ١$ [١٠] $(١ + \text{س})^{-٥} = \frac{١}{٢٤٣}$

(٦) إذا كان : $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = \sqrt{٣}$ أوجد في أبسط صورة قيمة كل من :

[١] $(\text{س} - \text{ص})^{٥٠}\ (\text{س} + \text{ص})^{٥٠}$

[٢] $\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ص}}\right)^{-٢}$

(٧) أوجد قيمة س في كل مما يأتى :

[١] $(\text{س} + ١)^{٣} = \left(\frac{١}{٨}\right)^{-٢}$

[٢] $\frac{١}{(\text{س} + ٩)^{٤}} = ٠{,}٠٠٠١$

قوانين القوى الصحيحة غير السالبة في ح

١ – إذا كان : $أ \in ح^*$ ، م ، ن عددين صحيحين غير سالبين فإن : $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

فمثلاً : $(\sqrt{٣})^{٤} \times (\sqrt{٣})^{٢} = (\sqrt{٣})^{٦} = ٢٧$

تعميم : إذا كان : $أ \in ح^*$ ، م ، ن ، ..... ، ل أعداد صحيحة غير سالبة فإن :

$$أ^{م} \times أ^{ن} \times ..... \times أ^{ل} = أ^{م+ن+.....+ل}$$

٢ – إذا كان : $أ \in ح^*$ ، م ، ن عددين صحيحين غير سالبين ، م $\geq$ ن فإن : $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

فمثلاً إذا كان : أ ، ب $\in ح^*$ ، ن : $(\sqrt{٣})^{٤} \div (\sqrt{٣})^{٢} = (\sqrt{٣})^{٢} = ٣$

٣ – إذا كان : أ ، ب $\in ح^*$ ، ن عدداً صحيحاً غير سالب فإن : $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

تعميم : إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ..... ، ل $\in ح^*$ ، ن عدداً صحيحاً غير سالب فإن :

$$(أ \times ب \times حـ \times ..... \times ل)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن} \times حـ^{ن} \times ..... \times ل^{ن}$$

فمثلاً : $(\sqrt{٣} \times \sqrt{٥})^{٢} = (\sqrt{٣})^{٢} \times (\sqrt{٥})^{٢} = ٣ \times ٥ = ١٥$

ملاحظات :

** $(أ+ب)^{ن} \neq أ^{ن} + ب^{ن}$ ، $(أ-ب)^{ن} \neq أ^{ن} - ب^{ن}$

فمثلا : $(٣+٤)^{٣} = ٧^{٣} = ٣٤٣$ بينما : $٣^{٣} + ٤^{٣} = ٢٧ + ٦٤ = ٩١$

** $(-أ)^{ن} = \begin{cases} أ^{ن} & \text{إذا كان : ن عدداً زوجياً} \\ -أ^{ن} & \text{إذا كان : ن عدداً فردياً} \end{cases}$

فمثلا : $(-٣)^{٤} = ٨١$ ، $(-٣)^{٣} = ٢٧$

٤ – إذا كان : أ ، ب $\in$ ح ، ن عدداً صحيحاً غير سالب فإن :

$(أ \div ب)^{ن} = أ^{ن} \div ب^{ن}$ حيث : أ $\neq$ صفر ، ب $\neq$ صفر

تعميم : إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ..... ، ل $\in ح^*$ ، ن عدداً صحيحاً غير سالب فإن :

$$\left(\frac{أ \times ب \times حـ \times ..... \times ل}{ء \times هـ \times و \times ..... \times ك}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن} \times ب^{ن} \times حـ^{ن} \times ..... \times ل^{ن}}{ء^{ن} \times هـ^{ن} \times و^{ن} \times ..... \times ك^{ن}}$$ حيث أياً من عوامل المقام $\neq$ ٠

فمثلاً : $\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}\right)^{٢} = \frac{(\sqrt{٣})^{٢}}{(\sqrt{٥})^{٢}} = \frac{٣}{٥}$

٥ – إذا كان : $أ \in ح^*$ ، م ، ن عددين صحيحين غير سالبين فإن : $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

تعميم : إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ..... ، ل $\in ح^*$ ، ن عدداً صحيحاً غير سالب فإن :

$$\left(\frac{أ^{م} \times ب^{ل} \times حـ^{ع} \times .....}{ء^{س} \times هـ^{ص} \times و^{ك} \times .....}\right)^{ن} = \frac{أ^{م} \times ب^{ل} \times حـ^{ع} \times .....}{ء^{س} \times هـ^{ص} \times و^{ك} \times .....}$$ حيث أياً من عوامل المقام $\neq$ ٠

فمثلاً : $(٢^{٣})^{٢} = ٢^{٦} = ٦٤$ ، $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٦} = ٦٤$

مثال (١) : أختصر كلاً مما يأتى لأبسط صورة :

[١] $(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣} \times (\sqrt{٣})$

[٢] $\dfrac{(\sqrt{٥})^{١٠} \times (-\sqrt{٥})^{٥}}{(\sqrt{٥})^{١١}}$

الحل

[١] $(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣} \times (\sqrt{٣}) = (\sqrt{٣})^{٥+٣+١} = (\sqrt{٣})^{٨} = ٨١$

[٢] $\dfrac{(\sqrt{٥})^{١٠} \times (-\sqrt{٥})^{٥}}{(\sqrt{٥})^{١١}} = \dfrac{(\sqrt{٥})^{١٠} \times -(\sqrt{٥})^{٥}}{(\sqrt{٥})^{١١}}$

$= -(\sqrt{٥})^{١٠+٥-١١} = -(\sqrt{٥})^{٤} = -٢٥$

مثال (٢) : إذا كان : $٥^{س} = ٣$ أوجد قيمة $٥^{س+٢}$

الحل

$٥^{س+٢} = ٥^{س} \times ٥^{٢} = ٣ \times ٢٥ = ٧٥$

تمارين

١ – أكمل :

[١] $(\sqrt{٢})^{٢} \times (-\sqrt{٢})^{٣} \div (-\sqrt{٢})^{٤} = \dots\dots$

[٢] $(-\frac{٢}{٥})^{٢} \times (-\frac{٥}{٢})^{٣} \times (\frac{١}{٥})^{\text{صفر}} = \dots\dots$

[٣] $[(-\sqrt{٣})^{٢} \times (\sqrt{٣})]^{٢} = \dots\dots$

[٤] $\dfrac{(\sqrt{٧})^{٢} \times (\sqrt{٧})^{٨}}{(\sqrt{٧})^{٩}} = \dots\dots$

[٥] سدس العدد $٢^{١٣} \times ٣^{١٣} = \dots\dots$

[٦] إذا كان : $س \neq ٠$ ، $س + \frac{١}{س} = \sqrt{٣}$ فإن : $س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} = \dots\dots$

٢ – أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

[١] $(\sqrt{٥})^{-٤} \times (\sqrt{٥})^{٤} = \dots\dots$ (٥ ؛ ٢٥ ؛ ١ ؛ -١)

[٢] $٣^{٥} \times ٣^{٥} \times ٣^{٥} = \dots\dots$ ($٣^{٥}$ ؛ $٣^{٦}$ ؛ $٣^{١٥}$ ؛ $٣^{١٢٥}$)

[٣] $٣^{٥} + ٣^{٥} + ٣^{٥} = \dots\dots$ ($٣^{٥}$ ؛ $٣^{٦}$ ؛ $٣^{١٥}$ ؛ $٣^{١٢٥}$)

[٤] $٣^{٢} \times ٣^{٥} = \dots\dots$ ($٣^{٧}$ ، $٣^{٣}$ ، $٣^{١٠}$ ، $٣^{٥٢}$)

[٥] $٣^{٥} \times ٢^{٥} = \dots\dots$ ($٥^{١٠}$ ، $٦^{١٠}$ ، $٦^{٥}$ ، $٦^{٢٥}$)

٣ ـ إذا كان : $٣^{\text{س}} = ٥$ أوجد قيمة كل من :

[١] $٣^{\text{س}+٢}$ [٢] $(٢٧)^{\text{س}}$

٤ ـ إذا كان : $٣^{\text{س}} = ٢٧$ أوجد قيمة : $٢^{\text{س}}$

٥ ـ أختصر لأبسط صورة : $\frac{(٢\sqrt{٢})^{٥} \times (\sqrt{٢})^{٣}}{(\sqrt{٢})^{٦}}$

٦ ـ أوجد قيمة : $(\sqrt{٣})^{٦} \times ٣^{٤}$

٧ ـ أوجد قيمة : $(-\sqrt{٢})^{٨} + ٢^{٤}$

٨ ـ أوجد قيمة : $(٢)^{\text{صفر}} + (-\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{-٨}}$

٩ ـ إذا كان : $\text{س} = ٢\sqrt{٢}$ ، $\text{ص} = ٣$ أوجد قيمة المقدار : $(\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢})^{٣}$

١٠ ـ أثبت أن : $٣^{\text{س}+٢} - ٣^{\text{س}+١} = ١٠ \times ٣^{\text{س}}$

١١ ـ إذا كان : $\text{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\text{ع} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

أوجد قيمة : $\text{س}^{٢} + (\text{س ع})^{٢} \times \text{ص}^{٢}$

١٢ ـ إذا كان : $\text{س} = ٢ + \sqrt{٣}$ ، $\text{ص} = ٢ - \sqrt{٣}$

أوجد قيمة : $\text{س}^{٧} \text{ص}^{٨} - \text{ص}$

قوانين القوى الصحيحة السالبة في ح

تعميم قوانين الأسس :

إذا كان : أ ، ب $\in$ ح ، ن $\in$ ص فإن :

١ – $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

٢ – $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

٣ – $(أ\,ب)^{ن} = أ^{ن}\,ب^{ن}$

٤ – $(أ \div ب)^{ن} = أ^{ن} \div ب^{ن}$

٥ – $(أ^{م})^{ن} = أ^{م\,ن}$

ملاحظات :

١ – إذا كان : أ $\in$ $ح^{*}$ ، ن $\in$ $ص_{+}$

فإن : $أ^{ن} \times أ^{-ن} = ١$ أى أن : كل من $أ^{ن}$ ، $أ^{-ن}$ هو معكوس ضربى للآخر

٢ – إذا كان : أ ، ب $\in$ $ح^{*}$ ، ن $\in$ $ص_{+}$

فإن : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن}$

فمثلا : $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٣} = \frac{٦٤}{٢٧}$ ، $\left(\frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)^{-٢} = \frac{٩}{٥}$

أمثلة :

١ – أختصر لأبسط صورة : $\frac{(\sqrt{٧})^{-٤} \times (\sqrt{٧})^{-٣}}{(\sqrt{٧})^{-٩}}$

الحل

$\frac{(\sqrt{٧})^{-٤} \times (\sqrt{٧})^{-٣}}{(\sqrt{٧})^{-٩}} = (\sqrt{٧})^{-٤-٣+٩} = (\sqrt{٧})^{٢} = ٧$

٢ – أختصر لأبسط صورة : $\frac{٩^{س} \times ٣^{س+٢}}{٢٧^{س}}$

الحل

المقدار $= \frac{٣^{٢س} \times ٣^{س+٢}}{٣^{٣س}} = ٣^{٢س+س+٢-٣س} = ٣^{٢} = ٩$

٣ – أختصر لأبسط صورة : $\frac{٨١^{س} \times ٦٢٥^{س}}{١٥^{٤س}}$

الحل

المقدار $= \frac{٣^{٤س} \times ٥^{٤س}}{(٣ \times ٥)^{٤س}} = \frac{٣^{٤س} \times ٥^{٤س}}{٣^{٤س} \times ٥^{٤س}}$

$= ٣^{٤س-٤س} \times ٥^{٤س-٤س} = ٣^{صفر} \times ٥^{صفر} = ١ \times ١ = ١$

٤ ـ أختصر لأبسط صورة : $\dfrac{٢٧^{\text{س}-١} \times ٨^{\text{س}}}{(٢\sqrt{٢})^{٢\text{س}} \times (٣\sqrt{٣})^{٢\text{س}}}$

الحل

المقدار = $\dfrac{٣^{٣\text{س}-٣} \times ٢^{٣\text{س}}}{٢^{٣\text{س}} \times ٣^{٣\text{س}}} = ٣^{٣\text{س}-٣-٣\text{س}} \times ٢^{٣\text{س}-٣\text{س}} = ٣^{-٣} \times ٢^{\text{صفر}} = \dfrac{١}{٢٧} \times ١ = \dfrac{١}{٢٧}$

٥ ـ أختصر لأبسط صورة : $\dfrac{٢^{٢\text{س}+١} \times ١٠^{\text{س}}}{٨^{\text{س}} \times ٥^{\text{س}+١}}$

الحل

المقدار = $\dfrac{٢^{٢\text{س}+١} \times ٢^{\text{س}} \times ٥^{\text{س}}}{٢^{٣\text{س}} \times ٥^{\text{س}+١}} = ٢^{٢\text{س}+١+\text{س}-٣\text{س}} \times ٥^{\text{س}-\text{س}-١} = ٢ \times ٥^{-١} = \dfrac{٢}{٥}$

٦ ـ إذا كان : $\dfrac{٦^{٢\text{س}-٣}}{٢^{\text{س}-١} \times ٣^{\text{س}-١}} = ٦$ أوجد قيمة : س

الحل

$\because \dfrac{٦^{٢\text{س}-٣}}{٢^{\text{س}-١} \times ٣^{\text{س}-١}} = ٦$ $\therefore \dfrac{٦^{٢\text{س}-٣}}{(٢ \times ٣)^{\text{س}-١}} = ٦$

$\therefore \dfrac{٦^{٢\text{س}-٣}}{٦^{\text{س}-١}} = ٦$ $\therefore ٦^{٢\text{س}-٣-\text{س}+١} = ٦$

$\therefore ٦^{\text{س}-٢} = ٦$ $\therefore \text{س} - ٢ = ١$ ومنها : س = ٣

٧ ـ إذا كان : $\dfrac{٤^{٢\text{س}} \times (\sqrt{٣})^{٤\text{س}}}{٩^{\text{س}} \times ٤^{\text{س}}} = \dfrac{١}{١٦}$ أوجد قيمة : س

الحل

$\because \dfrac{٤^{٢\text{س}} \times (\sqrt{٣})^{٤\text{س}}}{٩^{\text{س}} \times ٤^{\text{س}}} = \dfrac{١}{١٦}$ $\therefore \dfrac{٤^{٢\text{س}} \times ٩^{\text{س}}}{٩^{\text{س}} \times ٤^{\text{س}}} = \dfrac{١}{١٦}$

$\therefore ٤^{٢\text{س}-\text{س}} \times ٩^{\text{س}-\text{س}} = ٤^{-٢}$ $\therefore ٤^{\text{س}} \times ٩^{\text{صفر}} = ٤^{-٢}$

$\therefore ٤^{\text{س}} \times ١ = ٤^{-٢}$ $\therefore \text{س} = -٢$

حاتم طه
0126944555

تمـــارين

١) أكمل ما يأتى :

[١] $(٣ + \sqrt{٥})^{٤} (٣ + \sqrt{٥})^{-٤} = \ldots\ldots$

[٢] إذا كان : $٣^{س} = ٦$ ، $\frac{١}{٣^{ص}} = ٥$ فإن : $٣^{س+ص} = \ldots\ldots$

[٣] $س^{-٧} + ١ = س^{-٧} (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

[٤] إذا كان : $٣^{س} = ٥$ فإن : $٣^{س-١} = \ldots\ldots$

٢) أختصر كلاً مما يأتى لأبسط صورة :

[١] $(\sqrt{٣})^{٦} \times (\sqrt{٥})^{-٦}$

[٢] $\dfrac{(\sqrt{٢})^{-٥} \times (\sqrt{٢})^{-٤}}{(\sqrt{٢})^{-١١}}$

[٣] $\dfrac{(٠.١)^{٢} \times ٠.٠٠١}{(١٠)^{٢} \times (١٠)^{-٧}}$

[٤] $\dfrac{٢٧^{س} \times ٤^{س+١}}{١٢^{س} \times ٣^{٢س+١}}$

[٥] $\dfrac{٥^{٤س-١} \times ٢٧^{س+١}}{١٢٥^{س-١} \times ١٥^{س+٥} \times ٣^{٢س-٢}}$

[٦] $\dfrac{٨^{ن-٤} \times ٦^{٧-ن} \times ٩^{ن-٢}}{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}}$

٣) إذا كان : $\dfrac{١٢^{٣س-٢} \times ٩^{س+١}}{٣^{٤س} \times ٤^{٣س-٢}} = ٩$ أوجد قيمة : س

٤) إذا كان : $\dfrac{٩^{س+١} \times ٤^{س-١}}{٣٦^{س}} = \left(\frac{٣}{٢} \right)^{س}$ أوجد قيمة : س ثم أوجد قيمة : $(٣)^{-س}$

٥) أختصر لأبسط صورة : $\dfrac{٢^{٥س} \times ٣^{٢س+١}}{٤^{-س} \times ٦^{٢س+١}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عندما س = ١

٦) أثبت أن : $\dfrac{(\sqrt{٣})^{٢-س} \times (١٥)^{س+٢}}{(\sqrt{٣})^{-س} \times ٣^{س} \times ٥^{س+٢}} = ٢٧$

٧) حل المعادلة : $\dfrac{(١٤)^{٢س} \times ٤^{س+١}}{٤ \times ٧^{س} \times ١٦^{س}} = ٤٩$

العمليات الحسابية على القوى الصحيحة

نعلم أن : عند إجراء العمليات الحسابية يراعى ترتيب العمليات الآتية :

١ – إجراء العمليات داخل الأقواس الداخلية ثم الخارجية " إن وجدت "

٢ – حساب قوى العدد " الأسس "

٣ – إجراء عمليات الضرب و القسمة من اليمين إلى اليسار

٤ – إجراء عمليات الجمع و الطرح من اليمين إلى اليسار

و هذا هو نفس الترتيب المستخدم في الآلات الحاسبة

مثال (١) : أوجد الناتج في أبسط صورة : $٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \div ٦^{-٤}$

الحل

$$٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \div ٦^{-٤} = ٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \div ٦^{٤} = ٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \times ٢^{٤} \times ٣^{٤}$$

$$= ٢^{-٣+٤} \times ٣^{-٢+٤} = ٢ \times ٣^{٢} = ٢ \times ٩ = ١٨$$

و تستخدم الآلة الحاسبة للتأكد من صحة الناتج على النحو الآتى :

أبدأ

تدريب :

أوجد ناتج المقدار : $\dfrac{(١٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣} \times (٣)^{٣}}{٩ \times (\sqrt{٥})^{-٣}}$

الحل

(الناتج = $\frac{٥}{٣}$)

و تستخدم الآلة الحاسبة للتأكد من صحة الناتج على النحو الآتى :

ملاحظة : حيث أن المقام يحتوى على عمليات حسابية فيجب كتابته بين قوسين كما هو موضح

مثال (٢) : إذا كان : $٧^{س} + ٧^{س-١} = ٥٦$ أوجد قيمة : س

الحل

$\because ٧^{س} + ٧^{س-١} = ٥٦$ $\therefore ٧^{س} \times (٧ + \frac{١}{٧}) = ٥٦$

$\therefore ٧^{س} \times \frac{٨}{٧} = ٥٦$ $\therefore ٧^{س} = ٥٦ \times \frac{٧}{٨}$

$\therefore ٧^{س} = ٤٩ = ٧^{٢}$ $\therefore س = ٢$

التحقيق : الطرف الأيمن = $٧^{٢} + ٧^{٢-١} = ٤٩ + ٧ = ٥٦$ = الطرف الأيسر

مثال (٣) : إذا كان : حجم الكرة ع = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} أوجد ع إذا كان نق = ٧.٣ سم حيث π = ٣.١٤

الحل

∵ ع = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ∴ ع = $\frac{٤}{٣} \times ٣.١٤ \times (٧.٣)^{٣}$

بإستخدام الحاسبة نجد : ع = ١٦٢٩ سم^{٣} تقريباً

تمارين

١ ـ أوجد الناتج في أبسط صورة : $٣^{-٣} \times ٢^{-٢} \div ٤^{-٣}$

٢ ـ إذا كان : $٥^{س} + ٥^{س} + ٥^{س} + ٥^{س} + ٥^{س} = ٢٥$ أوجد قيمة : س

٣ ـ إذا كان : س = ٢ − $\sqrt{٣}$ ، ص = ٢ + $\sqrt{٣}$ أوجد قيمة : $(س^{٧} ص^{٨} - ص) + (س + ص)^{٦}$

٤ ـ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١) $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$ ٢) $٧^{٣س+١} + ٧^{٣س-١} = \frac{٥٠}{٤٩}$

٣) $٣^{س+١} + ٣^{س-٢} = ٢٣٤$ ٤) $٤٩^{س} - ٥٠ \times ٧^{س} + ٤٩ = ٠$

٥ ـ أثبت أن :

١) $\frac{٣^{٢س+٢} - ٣^{٢س-١}}{٥ \times ٣^{٢س} - ٧ \times ٣^{٢س-١}} = \frac{٧}{٢}$

٢) $\frac{٢^{س+١}}{٢^{س-١}} + \frac{٢^{س-١}}{٢^{س+١}} = \frac{١٧}{٤}$

٦ ـ إذا كان : $\frac{١٦ \times ٢^{٢س} - ٢ \times ٤^{س}}{٢ \times ٤^{س} + ٥ \times ٢^{٢س}} = ٢^{س-١}$ أوجد قيمة : س

٧ ـ إذا كان : $\frac{(٢٧)^{س-١} \div (٢)^{-٣س}}{(٢\sqrt{٢})^{٢س} \times (٣\sqrt{٣})^{٢س}} = ٣^{س}$ أوجد قيمة : س

٨ ـ إذا كان حجم الكرة ع = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} أوجد طول نصف قطر الكرة التى حجمها = ٩٠٤.٣٢ سم^{٣}
متخذا π = ٣.١٤

٩ ـ إذا كان : جـ = م $(١ + ر)^{ن}$ حيث " جـ " جملة مبلغ م ، " ر " ربح الجنيه في السنة ، " ن "
عدد السنوات فأوجد " جـ " إذا كانت م = ١.٣×١٠^{٥} ، ر = ٦.٧×١٠^{-٣} ، ن = ١٥

١٠ ـ إذا كان حجم المخروط الدائرى القائم ع = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع فأوجد طول نصف قطر قاعدته إذا علم أن
حجم المخروط = ٣.٥×١٠^{٣} سم^{٣} ؛ طول نصف إرتفاعه = ٧سم متخذا π = $\frac{٢٢}{٧}$

النسبة و التناسب

النسبة

تعريف : النسبة هى مقارنة بين كميتين

فإذا كان : ٲ ، ب عددين حقيقيين يعبران عن كميتين من نفس النوع ولهما نفس الوحدة فإن :
النسبة بينهما هى علاقة تبين مقدار إحتواء أحدهما على الآخر

، تكتب هذه النسبة بإحدى الصورتين ٲ : ب أو $\frac{\text{ٲ}}{\text{ب}}$ و تقرأ ٲ إلى ب

، يسمى ٲ مقدم النسبة ، ب تالى النسبة ، يسمى ٲ ، ب معاً حدى النسبة

ملاحظات : * النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها فى (أو قسما على) عدد حقيقى ≠ صفر

فمثلاً ٣ : ٤ = ١٥ : ٢٠ وذلك بضرب حديها × ٥

، ٣٠ : ٤٠ = ٣ : ٤ وذلك بقسمة حديها ÷ ١٠

* النسبة تتغير إذا جمع إلى حديها (أو طرح من) عدد حقيقى ≠ صفر

فمثلاً ٣ : ٤ ≠ ٥ : ٦ وذلك بإضافة ٢ إلى حديها

، ١٠ : ٩ ≠ ٧ : ٦ وذلك بطرح ٣ من حديها

* إذا كان : $\frac{\text{ٲ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٤}$ فذلك لا يعنى أن : ٲ = ٣ ، ب = ٤

لأن هذه الأعداد هى صورة مختصرة من الأعداد الأصلية

والصواب أن نقول : ٲ = ٣ م ، ب = ٤ م حيث : م ثابت ≠ صفر

أمثلة :

(١) أوجد النسبة بين طولى رجل و أبنه حيث طول الرجل متر ونصف وطول أبنه ٩٠ سم

الحل

$\frac{\text{طول الرجل}}{\text{طول الأبن}} = \frac{١٥٠}{٩٠} = \frac{٥}{٣}$

(٢) إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة $\frac{٧\text{ س} - ٤\text{ ص}}{٢\text{ س} + \text{ص}}$

الحل

∵ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$ ∴ س = ٣ م ، ص = ٤ م حيث : م ثابت ≠ صفر

∴ $\frac{٧\text{ س} - ٤\text{ ص}}{٢\text{ س} + \text{ص}} = \frac{٧ \times ٣\text{ م} - ٤ \times ٤\text{ م}}{٢ \times ٣\text{ م} + ٤\text{ م}} = \frac{٢١\text{ م} - ١٦\text{ م}}{٦\text{ م} + ٤\text{ م}} = \frac{٥\text{ م}}{١٠\text{ م}} = \frac{١}{٢}$

(٣) إذا كان $\frac{\text{س} + ٢\text{ ص}}{٣\text{ س} - \text{ص}} = \frac{٢}{٣}$ أوجد $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الحل

∵ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

∴ ٣ (س + ٢ ص) = ٢ (٣ س − ص) ∴ ٣ س + ٦ ص = ٦ س − ٢ ص

∴ ٦ ص + ٢ ص = ٦ س − ٣ س ∴ ٨ ص = ٣ س ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٨}{٣}$

(٤) إذا كان ٦ $\text{س}^٢$ − ١١ س ص + ٣ $\text{ص}^٢$ = ٠ أوجد $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الحل

بالتحليل : (٢ س − ٣ ص)(٣ س − ص) = ٠

∴ ٢ س − ٣ ص = ٠ ومنها ٢ س = ٣ ص ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٢}$

أو ٣ س − ص = ٠ ومنها ٣ س = ص ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١}{٣}$

(٥) إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة $\frac{\text{٥ أ س + ٢ ب ص}}{\text{٤ ب س − ٥ أ ص}}$

الحل

نفرض أن أ = ٢ م ، ب = ٥ م حيث : م ثابت ≠ صفر

،، س = ٣ ك ، ص = ٤ ك حيث : ك ثابت ≠ صفر

ثـــــــــــم أكمل الحل ــــــــــــــ

(٦) ما هو العدد الذى إذا أضيف إلى حدة النسبة ٥ : ٣٧ فإنها تصبح ١ : ٣

الحل

نفرض أن العدد هو س ثـــــــــــم أكمل الحل ــــــــــــــ

تمارين

١ ـ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) إذا كان ٤ ص = ٧ س فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ... ($\frac{١}{٢٨}$ ، $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٧}{٤}$ ، ٢٨)

٢) إذا كان $\frac{\text{س + ٣}}{\text{ص + ٥}} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ... ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٥}$ ، ٥)

٣) إذا كان ٣ أ = ٧ ب فإن $\frac{\text{أ + ب}}{\text{٤ أ − ٦ ب}}$ = ... ($\frac{٢}{٣}$ ، ٤ ، ١ ، −٢)

٤) إذا كان $\frac{\text{س + ص}}{\text{س − ص}} = \frac{٥}{١}$ فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ... ($\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{١٤}{١٠}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

٥) إذا كان (٣ س − ص) : (س + ٢ ص) = ١ : ٢ فإن س : ص = ...

(٥ : ٤ ، ٤ : ٥ ، ٣ : ٢ ، ٢ : ٣)

٦) إذا كان (٢ س − ٣) : (س − ٥) = ١ : ٤ فإن س = ...

(١ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

٢ ـ أكمل ما يأتى :

١) إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$ فإن س = ... ، ص = ...

٢) إذا كان ٤ س = ٨ ص فإن س : ص = ...

٣) إذا كان ٥ س − ٦ ص = ٠ فإن س : ص = ...

٤) إذا كان ٤ $\text{س}^{٢}$ − $\text{ص}^{٢}$ = ٠ حيث س ، ص ∈ ح_{+} فإن س : ص = ...

٥) إذا كان $\frac{\text{٤ ص}}{\text{٥ س}}$ = ١ فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

٦) إذا كان $\frac{س - ١}{س} = \frac{١}{٣}$ فإن س = ...

٧) إذا كان $\frac{س - ١}{٤س - ٦} = \frac{١}{س}$ فإن س = ...

٣ − إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة $\frac{ص - س}{ص + س}$

٤ − إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة $\frac{٤س^{٢} - ص^{٢}}{٦ س ص}$

٥ − إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٧}$ ، $\frac{حـ}{ء} = \frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة $\frac{ب ء - أ حـ}{٤ ب ء - ٢ أ حـ}$

٦ − إذا كان $٩ س^{٢} - ١٦ ص^{٢} = ٠$ حيث س ، ص $\in$ ح$_{+}$ أوجد قيمة $\frac{س}{ص}$

٧ − إذا كان $٢٥ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٠$ س ص حيث س ، ص $\in$ ح$_{+}$ أوجد قيمة $\frac{س}{ص}$

٨ − إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ، كان س + ص = ٢١ أوجد قيمة س ، ص

٩ − ما هو العدد الذى يضاف إلى حدى النسبة ٥ : ٧ لتكون مساوية للنسبة ٧ : ٨

١٠ − ما هو العدد الذى طرح من حدى النسبة ٥ : ٦ لأصبحت ٤ : ٣

١١ − أوجد العدد الذى إذا طرح مربعه من حدى النسبة ٤١ : ٩١ فإنها تصبح ١ : ٣

١٢ − عددان صحيحان موجبان النسبة بينهما ٣ : ٥ ، إذا أضيف إلى الأصغر ٤ وطرح من الأكبر ٢ أصبحت النسبة بين العددين الناتجين ٢ : ٣ أوجد العددين

١٣ − عددان موجبان النسبة بينهما ٢ : ٣ ، مربع نصف أصغرهما يزيد عن ضعف أكبرهما بمقدار ١٦ فما هما العددان ؟

١٤ − إذا كان أ : ب = ٣ : ٤ ، ب : حـ = ٢ : ٥ أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$٢ أ س^{٢} + ب س - حـ = ٠$

١٥ − أوجد النسبة التى لا تتغير قيمتها إذا طرح من مقدمها ٦ ، طرح من تاليها ٤

١٦ − إذا كان (٢ س + ٣ ص) : (٥ س − ص) = ١ : ٢ أوجد قيمة س : ص

ثم أوجد قيمة المقدار (س + ٣ ص) : (س − ص)

١٧ − إذا كان $٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١٢$ س ص أوجد قيمة المقدار $\frac{س + ٣ ص}{٣ س}$

التناسب

تعريف : التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فإن : أ ، ب ، حـ ، ء تسمى كميات متناسبة

، إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$

، و يسمى أ " المتناسب الأول " ، ب " المتناسب الثانى " ، حـ " المتناسب الثالث " ، ء " المتناسب الرابع "

كما يسمى أ ، ء " طرفى التناسب " ، حـ ، ء " وسطى التناسب "

خواص التناسب :

(١) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فإن :

* أ = م حـ ، ب = م ء حيث : م ∈ ح " ح − { ٠ } "
* أ ء = ب حـ " حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين "
* $\frac{أ}{حـ} = \frac{ب}{ء}$

أذكر أمثلة عددية تحقق هذه الخواص

(٢) إذا كان : أ ء = ب حـ فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ ، $\frac{أ}{حـ} = \frac{ب}{ء}$

أذكر أمثلة عددية تحقق هذه الخواص

(٣) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = \cdots$ ، م$_1$ ، م$_2$ ، م$_3$ ، ..... ∈ ح " ح − { ٠ } "

فإن : $\frac{أ م_1 + حـ م_2 + هـ م_3 + \cdots}{ب م_1 + ء م_2 + و م_3 + \cdots}$ = إحدى النسب

فمثلاً : إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فإن $\frac{٥ أ + ٣ حـ}{٥ ب + ٣ ء}$ = إحدى النسب

أمثلة :

(١) أوجد الثالث المتناسب للكميات ٢ ، ٣ ، ..... ، ٩

الحل

نفرض أن الثالث المتناسب هو س ∴ ٢ ، ٣ ، س ، ٩ متناسبة

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{س}{٩}$ ∴ ٢ س = ١٨ ∴ س = ٦

∴ الثالث المتناسب هو ٦

(٢) أوجد الرابع المتناسب للكميات س ، ص ، س^2

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب هو ك ∴ س ، ص ، س^2 ، ك متناسبة

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{س^2}{ك}$ ∴ س ك = س^2 ص ∴ ك = س ص

∴ الرابع المتناسب هو س ص

(٣) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٥ ، ٢ ، ٧ لحصلنا على أعداد متناسبة

الحل

نفرض أن العدد هو س ∴ ١ + س ، ٥ + س ، ٢ + س ، ٧ + س كميات متناسبة

أكمل الحل العدد هو ٣

(٤) إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٨}}$ أوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{\text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{\text{س} + \text{ص}}$

الحل

نفرض أن $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٨}} = \text{م}$ ∴ س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٨ م

∴ المقدار = = = ١ " أكمل الحل "

(٥) إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ أثبت أن $\frac{\text{س} + \text{٣ ص}}{\text{ع} + \text{٣ ل}} = \frac{\text{٥س} + \text{ص}}{\text{٥ ع} + \text{ل}}$

الحل

نفرض أن $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \text{م}$ حيث م ثابت ≠ صفر ∴ س = ص م ، ع = ل م

الطرف الأيمن = $\frac{\text{ص م} + \text{٣ ص}}{\text{ل م} + \text{٣ ل}} = \frac{\text{ص (م + ٣)}}{\text{ل (م + ٣)}} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}}$

الطرف الأيسر = $\frac{\text{٥ ص م} + \text{ص}}{\text{٥ ل م} + \text{ل}} = \frac{\text{ص (٥م + ١)}}{\text{ل (٥م + ١)}} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}}$ ∴ الطرفان متساويان

حل آخر

بضرب حدى النسبة الثانية × ٣ فإن : مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب

∴ $\frac{\text{س} + \text{٣ ص}}{\text{ع} + \text{٣ ل}}$ = إحدى النسب (١)

بضرب حدى النسبة الأولى × ٥ فإن : مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب

∴ $\frac{\text{٥س} + \text{ص}}{\text{٥ ع} + \text{ل}}$ = إحدى النسب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $\frac{\text{س} + \text{٣ ص}}{\text{ع} + \text{٣ ل}} = \frac{\text{٥س} + \text{ص}}{\text{٥ ع} + \text{ل}}$

(٦) إذا كانت س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة وكان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع} + \text{ل}}{\text{ل}}$
أثبت أن س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

الحل

∵ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

∴ س ل + ~~ل ص~~ = ع ص + ~~ل ص~~ ∴ س ل = ع ص

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ ∴ س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

(٧) إذا كان $\frac{س}{٢ أ - ب} = \frac{ص}{٢ ب - حـ} = \frac{ع}{٢ حـ - أ}$ أثبت أن $\frac{س + ٢ع}{٤ حـ - ب} = \frac{٤ س + ٢ ص + ع}{٧ أ}$

الحل

∵ مقدم النسبة الأولى بالمطلوب = س + ٢ ع

∴ بضرب حدى النسبة الثالثة × ٢ وجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثالثة ينتج :

∴ = إحدى النسب (١)

، ∵ مقدم النسبة الثانية بالمطلوب = ٤ س + ٢ ص + ع

∴ بضرب حدى النسبة الأولى × ٤ و حدى النسبة الثانية × ٢ وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة ينتج :

∴ = إحدى النسب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن = أكمل الحل

(٩) فى بداية أحد أيام الحملة القومية للتطعيم ضد الدرن كانت النسبة بين عدد الأطفال الذين تم تطعيمهم فى محافظة القاهرة إلى عدد الأطفال فى محافظة أسوان تساوى ١٢ : ٨ فإذا زاد عدد الأطفال فى كل من المحافظتين فى نهاية اليوم ٢٠٠٠ طفل لأصبحت النسبة ١٠ : ٨ أوجد عدد الأطفال الذين تم تطعيمهم فى كل من المحافظتين فى ذلك اليوم

الحل

نفرض أن عدد الأطفال الذين تم تطعيمهم فى بداية اليوم فى محافظة القاهرة س

، عدد الأطفال الذين تم تطعيمهم فى محافظة أسوان ص

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{١٢}{٨}$ ∴ س = ١٢م ، ص = ٨ م

وبعد الزيادة = $\frac{س + ٢٠٠٠}{ص + ٢٠٠٠} = \frac{١٠}{٨}$ ∴ $\frac{١٢م + ٢٠٠٠}{٨ م + ٢٠٠٠} = \frac{١٠}{٨}$ ومنها م = ٢٥٠

∴ عدد أطفال محافظة القاهرة س = ٣٠٠٠

، عدد أطفال محافظة أسوان ص = ٢٠٠٠

تمارين

١ ــ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) إذا كان ٦ ، ٩ ، س ، ١٥ فى تناسب فإن س = ... (١٢ ، ١٠ ، ٣ ، ٥)

٢) إذا كانت أ ، س ، ب ، ٢ س كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

(٢ : ١ ، ١ : ٢ ، ١ : ٣ ، ١ : ٤)

٣) إذا كان ٣ ، س ، ٦ ، ١٢ متناسبة فإن س = ... (١٢ ، ٦ ، ٣ ، ١)

٤) إذا كان أ ب = حـ ء فإن الكميات المتناسبة هى ....

(أ ، ب ، حـ ، ء أ، ب ، أ ، ء ، حـ أ، أ ، حـ ، ء ، ب أ ، ب ، ء ، أ ، حـ)

٥) إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{ل}$ فإن ل = ... (٢ ، -٢ ، ٣ ، ٥)

٢ ــ أكمل ما يأتى :

١) إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٥}$ فإن ٥ س = ٠٠٠٠٠

٢) إذا كان ١٠ ، ٥ ، س ، ٣ كميات متناسبة فإن س = ٠٠٠٠٠

٣) الرابع المتناسب للكميات ١ ، ٤ ، ١٠ هو ٠٠٠٠٠

٥) إذا كانت ٥ ، ص ، ٤ ، ١ كميات متناسبة فإن ص = ٠٠٠٠٠

٦) إذا كانت ٩ ، ٣ س ، ب ، ٢ س فى تناسب فإن ٩ : ب = ٠٠٠٠٠

٧) إذا كان س ، $\text{س}^{٢}$ ، ٣ س ، ١٢ كميات متناسبة فإن قيمة س الموجبة = ٠٠٠٠٠

٨) إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ فإن $\frac{٧\,\text{س} + ٠٠٠٠٠}{٠٠٠٠٠ + ٤\,\text{ل}}$ = أحدى النسب

٩) إذا كان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{١٥} = \frac{\text{س} - \text{ص}}{١١}$ فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ٠٠٠٠٠

١٠) إذا كان س ــ ٣ ، س + ٣ ، ص ــ ١ ، ص + ١ متناسبة فإن س : ص = ٠٠٠٠٠

١١) إذا كان $\frac{١}{٢}$ س = $\frac{١}{٣}$ ص = $\frac{١}{٤}$ ع فإن س : ص : ع = ٠٠٠٠٠

٣ ــ أوجد الرابع المتناسب للكميات (١) ٢ ، ٣ ، ٤

(٢) س ، ص ، س ص

٤ ــ أوجد الثالث المتناسب للكميات (١) ٨ ، ٧ ، ٠٠٠٠٠ ، ١٤

(٢) س ، س + ص ، ٠٠٠٠٠ ، $\text{س}^{٢}$ ــ $\text{ص}^{٢}$

٥ ــ أوجد العدد الذى إذا أضيف لكل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٥ لحصلنا على أعداد متناسبة

٦ ــ أوجد العدد الذى إذا طرح من كل من الأعداد ١٤ ، ١٩ ، ١٢ ، ١٦ لحصلنا على أعداد متناسبة

٧ ــ إذا كان س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة أثبت أن :

(١) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ص}} = \frac{\text{ع} + \text{ل}}{\text{ع} - \text{ل}}$ (٢) $\frac{\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - \text{ل}^{٢}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ص ل}}$

٨ ــ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ أثبت أن :

(١) $\frac{٣\,\text{س} + ٤\,\text{ع} - \text{هـ}}{٣\,\text{ص} + ٤\,\text{ل} - \text{و}} = \sqrt{\frac{\text{س هـ}}{\text{ص و}}}$ (٢) $\frac{\text{س}^{٢} + \text{هـ}^{٢}}{\text{ص}^{٢} + \text{و}^{٢}} = \frac{٥\,\text{س ع} + ٧\,\text{هـ}^{٢}}{٣\,\text{ص} + ٤\,\text{ل} - \text{و}^{٢}}$

٩ ــ إذا كان ($٩^{٢}$ + $\text{حـ}^{٢}$) : (٩ ب + حـ ء) = حـ : ء أثبت أن ٩ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

١٠ ـ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ع} - \text{ص}} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{س}}$ حيث $\text{س} + \text{ع} \neq$ صفر أثبت أن كل النسب = ٢

ثم أوجد س : ص : ع

١١ ـ إذا كان $\frac{\text{س}}{٣\text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٣\text{ع}}{\text{ص}}$ أثبت أن س = ص = ٣ ع

١٢ ـ إذا كان $\frac{\text{س}}{٤} = \frac{\text{ص}}{٥} = \frac{\text{ع}}{٣}$ أثبت أن $\frac{\text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{\text{س} + \text{ص} - \text{ع}} = \frac{١}{٣}$

١٣ ـ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ع} + \text{ل}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع} - \text{ل}}$ أثبت أن $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{ل}}$

١٤ ـ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{أ} - \text{ب} + \text{حـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب} - \text{حـ} + \text{أ}} = \frac{\text{ع}}{\text{حـ} - \text{أ} + \text{ب}}$

أثبت أن $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{أ}} = \frac{\text{ع} + \text{ص}}{\text{ب}}$

١٥ ـ إذا كان $\frac{\text{س}}{٣\text{أ} - \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{٣\text{ب} - \text{حـ}} = \frac{\text{ع}}{٣\text{حـ} - \text{أ}}$

أثبت أن $\frac{٣\text{س} + \text{ص}}{٩\text{أ} - \text{حـ}} = \frac{\text{س} + ٣\text{ع}}{٩\text{حـ} - \text{ب}}$

١٦ ـ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{أ} + ٤\text{ب}} = \frac{\text{ص}}{٤\text{أ} - \text{حـ}} = \frac{\text{ع}}{٦\text{أ} - ٤\text{ب}}$ أثبت أن $\frac{\text{س} + \text{ع}}{٤\text{س} - \text{ص}} = \frac{٧\text{أ}}{١٧\text{ب}}$

١٧ ـ فى بداية أحد أيام الحملة القومية للتطعيم ضد شلل الأطفال كانت النسبة بين عدد الأطفال الذين تم تطعيمهم فى محافظة القاهرة إلى عدد الأطفال فى محافظة أسوان تساوى ١٢ : ٧ فإذا زاد عدد الأطفال فى كل من المحافظتين فى نهاية اليوم ١٩٠٠ طفل لأصبحت النسبة ١١ : ٨ أوجد عدد الأطفال الذين تم تطعيمهم فى كل من المحافظتين فى ذلك اليوم

١٨ ـ قطعة أرض مثلثة الشكل النسبة بين أطوال أضلاعها ٣ : ٥ : ٧ فإذا كان محيط هذه القطعة يساوى ٣٠ متراً أوجد أطوال أضلاع قطعة الأرض

١٩ ـ في مجال إهتمام الدولة بالريف رصدت الدولة مبلغ ١.٨٥×١٠^{٦} جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة و وحدة صحية و مركز شباب فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{٣}{٢}$ من تكاليف الوحدة الصحية و تكاليف الوحدة الصحية $\frac{٥}{٦}$ من تكاليف مركز الشباب أوجد تكاليف كل منها

٢٠ ـ إذا كانت نسبة النجاح في إحدى المحافظات للشهادة الإعدادية هى ٨٣ ٪ و كانت نسبة نجاح البنين ٧٩ ٪ و نسبة نجاح البنات ٨٩ ٪ أوجد نسبة النجاح بين عدد البنين إلى عدد البنات في هذه المحافظة

التناسب المتسلسل

تعريف : يقال للكميات ا ، ب ، حـ أنها فى تناسب متسلسل إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{حـ}$

الحالة يسمى ا بالأول المتناسب ، ب بالوسط المتناسب ، حـ بالثالث المتناسب

حيث $ب^٢ = ا \, حـ$ أو $ب = \pm \sqrt{ا \, حـ}$

ملاحظات :

* يجب أن تكون الكميتين ا ، حـ موجبتين معاً أو سالبتين معاً

* إذا كانت الكميات ا ، ب ، حـ ، ء متناسبة فإن $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء}$

* إذا كانت الكميات ا ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل فإن $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء}$

* إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{حـ} = م$ فإن $ب = حـ \, م$ ، $ا = حـ \, م^٢$

* إذا كانت الكميات ا، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل أى أن $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

فإن $حـ = ء \, م$ ، $ب = ء \, م^٢$ ، $ا = ء \, م^٣$

أمثلة :

(١) أوجد الوسط المتناسب بين ٢ ، ٨

الحل

نفرض أن الوسط المتناسب هو س ∴ ٢ ، س ، ٨ متناسبة

∴ $\frac{٢}{س} = \frac{س}{٨}$ ∴ $س^٢ = ١٦$ ∴ $س = \pm ٤$

(٢) أوجد الوسط المتناسب بين $٦ \, س^٣$ ، $٢٤ \, س$

الحل

الوسط المتناسب $= \pm \sqrt{٦ \, س^٣ \times ٢٤ \, س} = \pm \sqrt{١٤٤ \, س^٤} = \pm ١٢ \, س^٢$

(٣) إذا كان س ، ص ، ع متناسبة أثبت أن $\frac{س^٢ - ٣ص^٢}{ص^٢ - ٣ع^٢} = \frac{س}{ع}$

الحل

نفرض أن $\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$ ∴ $ص = ع \, م$ ، $س = ع \, م^٢$

الطرف الأيمن $= \frac{ع^٢ م^٤ - ٣ ع^٢ م^٢}{ع^٢ م^٢ - ٣ ع^٢} = \frac{ع^٢ م^٢ (م^٢ - ٣)}{ع^٢ (م^٢ - ٣)} = م^٢$

الطرف الأيسر $= \frac{ع \, م^٢}{ع} = م^٢$

∴ الطرفان متساويان

(٤) أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل أثبت أن $\frac{\text{أ حـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢}}{\text{حـ}^{٢} + \text{ء}^{٢}}$

الحل

∵ أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ ∴ $\text{حـ} = \text{ء م}$ ، $\text{ب} = \text{ء م}^{٢}$ ، $\text{أ} = \text{ء م}^{٣}$

الطرف الأيمن = $\frac{\text{ء م}^{٣} \times \text{ء م}}{\text{ء م}^{٢} \times \text{ء}} = \text{م}^{٢}$

الطرف الأيسر = $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٤} + \text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{ء}^{٢}} = \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}(\text{م}^{٢} + ١)}{\text{ء}^{٢}(\text{م}^{٢} + ١)} = \text{م}^{٢}$ ∴ الطرفان متساويان

تمارين

١ – أكمل ما يأتى :

١) الوسط المتناسب بين العددين ٥ ، ٢٠ هو ....

٢) ١ ، ٧ ، .... فى تناسب متسلسل

٣) الثالث المتناسب للعددين ٣ ، ٦ هو .....

٤) الوسط الهندسى الموجب بين ٤ أ ب ، ٢٥ أ ب^{٣} يساوى ....

٥) الأول المتناسب للعددين ٣ ، ٩ هو ....

٦) إذا كان ل ، ٤ ، ٨ ، م فى تناسب متسلسل فإن ل = ... ، م = ...

٧) إذا كان $\frac{\text{حـ}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{٣} = ٥$ فإن حـ = ...

٢ – أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) الوسط المتناسب بين العددين ٣ ، ٢٧ هو .... (٨١ ، ٣٠ ، ± ٩ ، ٢٤)

٢) الثالث المتناسب للعددين ٩ ، – ١٢ هو .... (– ١٦ ، ٨ ، ١٦ ، ١٠٨)

٣) إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{ع}}{٣} = ٢$ فإن $\frac{\text{س}}{\text{ع}} =$ .... (٢ ، ٤ ، ٨ ، ٢٤)

٤) إذا كان س ، ص ، ع ، ل فى تناسب متسلسل ، م ثابت ≠ صفر فإن $\frac{\text{س}}{\text{ل}} =$ ....

(م ، م^{٢} ، م^{٣} ، م^{٤})

٥) إذا كان س ، ص ، ع فى تناسب متسلسل ، كان $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{٩}{١٦}$ فإن ص = ...

حيث م ثابت ≠ صفر (م ، م^{٢} ، م^{٣} ، ٢م)

٣ ــ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى الأعداد ٤ ، ١١ ، ٢٥ فإنها تكون فى تناسب متسلسل

٤ ــ إذا كان س ، ص ، ع كميات متناسبة أثبت أن :

(١) $\frac{\text{ص}}{\text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{س} + \text{ص}}$ (٢) $\frac{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = \frac{\text{س}}{\text{ع}}$

(٣) $\frac{\text{س}^{٣} - ٤\,\text{ص}^{٣}}{\text{ص}^{٣} - ٤\,\text{ع}^{٣}} = \frac{\text{س}}{\text{ص ع}}$ (٤) $\frac{\text{ص} - \text{ص ع}}{\text{س} - ٤\,\text{س ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{س}}$

٥ ــ إذا كان س ، ص ، ع ، ل فى تناسب متسلسل أثبت أن :

(١) $\frac{\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣}}{\text{ص}^{٣} - \text{ع}^{٣}} = \frac{\text{س}}{\text{ل}}$ (٢) $\frac{\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - \text{ع}^{٢}} = \frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{ع} - \text{ل}}$

(٣) $\frac{\text{س ص} - \text{ع ل}}{\text{س} + \text{ع}} = \frac{\text{ص}^{٢} - \text{ع}^{٢}}{\text{ص}}$ (٤) $\frac{\text{س} - \text{ل}}{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{س} - ٢\,\text{ص} + \text{ع}}{\text{س} - \text{ص}}$

٦ ــ إذا كان أ ، ب ، حـ ثلاث كميات موجبة بحيث ب^{٢} = أ حـ أثبت أن :

(٢أ ــ ب) : (٢ب ــ حـ) = (أ + ٣ب) : (ب + ٣ حـ)

٧ ــ إذا كان ص وسطاً متناسباً بين س ، ع أثبت أن $\frac{٥\,\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}} + \frac{٣\,\text{ص}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} = \frac{٨\,\text{س}}{\text{ع}}$

٨ ــ إذا كان أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل أثبت أن :

(ب + حـ) وسطاً متناسباً بين (أ + ب) ، (حـ + ء)

٩ ــ إذا كان أ : ب : حـ = ٥ : ٣ : ٢ أثبت أن

(أ ــ ب) : (٢ حـ) = (٢ حـ) : (أ + ب)

١٠ ــ إذا كان ١٦ ، س ، ص ، ٢ فى تناسب متسلسل أوجد قيمة س ، ص

١١ ــ إذا كانت س ، ص ، ع أطوال ثلاثة أضلاع متناسبة في مثلث و كان س + ص = ١٠ سم ، ص + ع = ١٥ سم أوجد س : ص

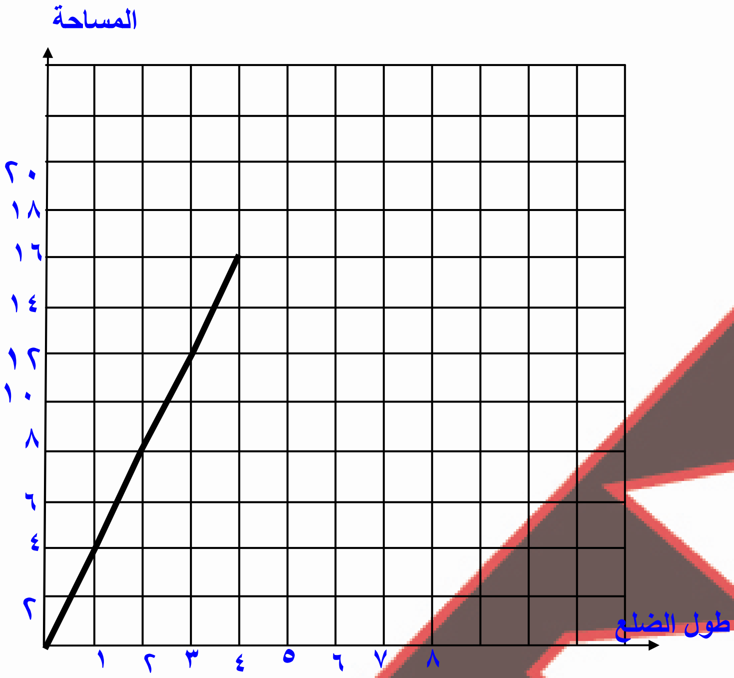
التغيـــر الطردى و التغير العكسى

أولاً : التغير الطردى

تمهيد :

إذا رمزنا لمساحة المربع بالرمز م و طول ضلعه بالرمز ل فإن : م = ٤ ل و بالتالى يكون :

ل	١	٢	٣	٤
م	٤	٨	١٢	١٦



ملاحظات :

* العلاقة بين المتغيرين م ، ل علاقة خطية و يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل

* $\frac{م}{ل}$ = ٤ " مقدار ثابت " في كل حالة

أى أن : م = ٤ ل

و يقال حينئذ أن : م تتغير طردياً بتغير ل

و تكتب رمزياً م ∝ ل

تعريف :

يقال أن ص تتغير طردياً مع س و اكتب ص ∝ س إذا كانت :

* ص = م س " حيث م ثابت ≠ ٠ "

* و إذا أخذ المتغير س القيمتين $س_1$ ، $س_2$ و لأخذ المتغير ص القيمتين $ص_1$ ، $ص_2$ على الترتيب

فإن : $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

ملاحظات :

* العلاقة بين المتغيرين س ، ص علاقة خطية و يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل

* إذا كانت ص ∝ س فإن ص = م س " حيث م ثابت ≠ ٠ "

و كذلك إذا كانت ص = م س " حيث م ثابت ≠ ٠ " فإن ص ∝ س

أمثلة

(١) إذا كانت ص ∝ س ، كانت ص = ٩ عندما س = ٣ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٦

الحل

∵ ص ∝ س ∴ ص = م س حيث م ثابت ≠ صفر

∵ ص = ٩ عندما س = ٣ ∴ ٩ = م × ٣ ∴ م = ٣

∴ العلاقة بين س ، ص هى ص = ٣ س

، عندما س = ٦ فإن ص = ٣ × ٦ = ١٨

(٢) إذا كانت ص ∝ س^2 ، كانت ص = ٨ عندما س = ٢ أوجد قيمة ص عندما س = ٤

الحل

∵ ص ∝ س^2 ∴ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1^2}{س_2^2}$

∴ $\frac{٨}{ص_2} = \frac{٤}{١٦}$ ∴ $ص_2 = \frac{٨ \times ١٦}{٤} = ٣٢$

(٣) إذا كانت ص = ﻫ + ب حيث ﻫ ثابت ، ب تتغير طردياً مع س ، كانت ص = ٧ عندما س = ٢
، ص = ١٦ عندما س = ٥ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ١٠

الحل

∵ ب ∝ س ∴ ب = م س حيث م ثابت ≠ صفر

∵ ص = ﻫ + ب ∴ ص = ﻫ + م س

∵ ص = ٧ عندما س = ٢ ∴ ٧ = ﻫ + ٢ م (١)

، ص = ١٦ عندما س = ٥ ∴ ١٦ = ﻫ + ٥ م (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ٩ = ٣ م ∴ م = ٣

بالتعويض فى (١) ∴ ﻫ = ١ ∴ العلاقة بين ص ، س هى : ص = ١ + ٣ س

، عندما ص = ١٠ ∴ ١٠ = ١ + ٣ س ومنها س = ٣

(٤) إذا كان حجم مخروط دائرى قائم (ع) يتغير طردياً مربع طول نصف قطر قاعدته (نق) حيث له إرتفاع ثابت
وكان حجمه ٢٢٥ سم^3 عندما كان طول نصف قطر قاعدته ٩ سم أوجد حجم المخروط عندما يكـــون طول
نصف قطر قاعدته ٦ سم

الحل

∵ ع ∝ نق^2 ∴ $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{نق_1^2}{نق_2^2}$

∴ $\frac{٢٢٥}{ع_2} = \frac{٨١}{٣٦}$ ∴ $ع_2 = \frac{٢٢٥ \times ٣٦}{٨١} = ١٠٠$ سم

∴ ع = ١٠٠ سم

(٥) إذا كان س^2 + ٩ ص^2 = ٦ س ص أثبت أن س ∝ ص

الحل

∵ س^2 – ٦ س ص + ٩ ص^2 = ٠ ∴ (س – ٣ ص)^2 = ٠ ∴ س = ٣ ص

∴ س = ثابت × ص ∴ س ∝ ص

ثانياً : التغير العكسى

تمهيد :

إذا رمزنا لمساحة المستطيل بالرمز م و أحد بعديه بالرمز س ، البعد الآخر بالرمز ص

فإن : م = س ص

و كانت مساحة المستطيل ثابتة و تساوى ٢٤ سم^{2} و بالتالى يكون :

س	٢	٣	٤	٦
ص	١٢	٨	٦	٤

ملاحظات :

* س ص = ٢٤ أى أن : ص = $\frac{\text{٢٤}}{\text{س}}$ أى أن : ص تتغير عكسياً بتغير س و تكتب رمزياً ص $\propto$ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

، بالمثل : س = $\frac{\text{٢٤}}{\text{ص}}$ أى أن : ص تتغير عكسياً بتغير س و تكتب رمزياً س $\propto$ $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$

تعريف :

يقال أن ص تتغير عكسياً مع س و اكتب ص $\propto$ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ إذا كانت :

* س ص = م " حيث م ثابت ≠ ٠ "
* و إذا أخذ المتغير س القيمتين س$_1$ ، س$_2$ و لأخذ المتغير ص القيمتين ص$_1$ ، ص$_2$ على الترتيب

فإن : $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$

ملاحظات :

* العلاقة بين المتغيرين س ، ص ليست علاقة خطية و لا يمثلها خط مستقيم
* إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س فإن ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ " حيث م ثابت ≠ ٠ "

و كذلك إذا كانت ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ " حيث م ثابت ≠ ٠ " فإن ص $\propto$ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

أمثلة

(١) إذا كانت ص $\propto$ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ، كانت ص = ١٢ عندما س = ٤ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٨

الحل

∵ ص $\propto$ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ∴ ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ حيث م ثابت ≠ صفر

∵ ص = ١٢ عندما س = ٤ ∴ ١٢ = $\frac{\text{م}}{\text{٤}}$ ∴ م = ٤٨

∴ العلاقة بين س ، ص هى ص = $\frac{\text{٤٨}}{\text{س}}$

، عندما س = ٦ فإن ص = $\frac{\text{٤٨}}{\text{٦}}$ = ٨

(٢) إذا كانت ص تتغير عكسياً بتغير س ، كانت ص = ٦ عندما س = ٣ أوجد قيمة س عندما ص = ١٨

الحل

∵ ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ $\frac{\text{ص}_١}{\text{ص}_٢} = \frac{\text{س}_٢}{\text{س}_١}$

∴ $\frac{\text{ص}_١}{\text{ص}_٢} = \frac{\text{س}_٢}{\text{س}_١}$ ∴ $\frac{٦}{١٨} = \frac{\text{س}_٢}{٣}$ س = ١

(٣) إذا كانت ص = أ + ب حيث أ ∝ س ، ب ∝ $\frac{١}{\text{س}^٢}$ ، كانت ص = ٩ عندما س = ١

، ص = ٤ عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٤

الحل

∵ أ ∝ س ∴ أ = م س ، ∵ ب ∝ $\frac{١}{\text{س}^٢}$ ∴ ب = $\frac{\text{ك}}{\text{س}^٢}$

∵ ص = أ + ب ∴ ص = م س + $\frac{\text{ك}}{\text{س}^٢}$

∵ ص = ٩ عندما س = ١ ∴ ٩ = م + ك (١)

، ص = ٤ عندما س = ٢ ∴ ٤ = ٢م + $\frac{\text{ك}}{٤}$ بالضرب × ٤

∴ ١٦ = ٨م + ك (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ٧ = ٧م ∴ م = ١

بالتعويض فى (١) ∴ ك = ٨ ∴ العلاقة بين ص ، س هى : ص = س + $\frac{٨}{\text{س}^٢}$

، عندما س = ٤ ∴ ص = ٤ + $\frac{٨}{١٦}$ ومنها س = ٤ $\frac{١}{٢}$

(٤) إذا كان إرتفاع إسطوانة دائرية قائمة " حجمها ثابت " (ع) يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر قاعدتها (نق) وكان الإرتفاع ٢٧ سم عندما كان طول نصف القطر ٦ سم أوجد نق عندما ع = ١٢سم

الحل

∵ ع ∝ $\frac{١}{\text{نق}^٢}$ ∴ $\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \frac{\text{نق}_٢^٢}{\text{نق}_١^٢}$

∴ $\frac{٢٧}{١٢} = \frac{\text{نق}_٢^٢}{٣٦}$ ∴ $\text{نق}_٢$ = ٩ سم

(١١) إذا كان س² ص² + ٩ = ٦ س ص أثبت أن س تتغير عكسياً بتغير ص

الحل

∵ س² ص² − ٦ س ص + ٩ = ٠ ∴ (س ص − ٣)² = ٠ ∴ س ص = ٣

∴ س = $\frac{٣}{\text{ص}}$ ∴ س تتغير عكسياً بتغير ص

تمارين

١ ـ أكمل ما يأتى :

١) إذا كان ء = ٥ ب فإن ء .... ب

٢) إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ٥ فإن س تتغير .... مع ص

٣) إذا كانت ء تتغير عكسياً مع مكعب ب فإن ء = ...

٤) إذا كان س ص = ٧ فإن ص تتغير .... مع س

٥) إذا كان س^{2} ص^{2} ـ ٨ س ص + ١٦ = ٠ فإن س تتغير .... مع ص

٦) إذا تغيرت ص عكسياً مع $\frac{1}{\text{س}}$ فإن ص تتغير طردياً مع ....

٧) إذا كان س ، ص كميتان متغيرتان ، كان $\frac{\text{س}_1 \text{ص}_1}{\text{س}_2 \text{ص}_2}$ = ١ فإن ص ∝ ....

٢ ـ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) إذا كان $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ك (ثابت ≠ صفر) فإن ص ∝ .... (س ؛ $\frac{1}{\text{س}}$ ، س^{2} ، $\frac{1}{\text{س}^2}$)

٢) إذا كان ء ∝ ب ، كان ء = ٨ عندما ب = ٢ فإن ب = ... عندما ء = ١٢
(٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩)

٣) إذا كان ص ∝ س^{2} ، كان ص = ٢ عندما س = ١ فإن س = ... عندما ص = ١٨
(٣ ، ـ ٣ ، ± ٣ ، ٩)

٤) إذا كان ص = $\frac{1}{\text{س}^2}$ فإن ص تتناسب مع .... (س ، س^{2} ، س$^{-2}$ ، س$^{-1}$)

٥) إذا كان س ص ـ ٩ = ٠ فإن .... (ص ∝ $\frac{1}{\text{س}}$ ، ص ∝ س ، س ∝ ص^{2} ، ص = س)

٣ ـ إذا كان ص ∝ س ، ص = ٨ عندما س = ٢ أوجد ص عندما س = ٤

٤ ـ إذا كانت ء تتغير بتغير ب وكانت ب = ٥ عندما ء = ١٠ أوجد العلاقة بين ء ، ب
ثم أوجد قيمة ء عندما ب = ٢

٥ ـ إذا كانت س ، ص موجبتين ، س ∝ ص^{2} وكانت س = ٤ عندما ص = ٢ أوجد العلاقة
بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٩

٦ ـ إذا كانت ص تتغير بتغير مكعب س ، وكانت ص = ٦٤ عندما س = ٢ أوجد العلاقة
بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٢٧

٧ ـ إذا كانت ص ∝ $\sqrt{\text{س}}$ وكانت س = ٢ عندما ص = ٤ أوجد قيمة س عندما ص = ٢

٨ ـ إذا كانت ص^{2} ∝ س^{3} وكانت ص = ٤ عندما س = ٣ أوجد قيمة س عندما ص = ١

٩ ـ إذا كان ص = ء + ٢ وكانت ء تتغير طردياً مع س وكانت ص = ٣ عندما س = ١
أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

١٠ ـ إذا كان ص = ﻡ + ب حيث ﻡ ثابت ، ب ∝ س وكانت ص = ١ عندما س = ١ ، كانت ص = ٥ عندما س = ٢ أوجد قيمة ص عندما س = ٣

١١ ـ إذا كان ص = ﻡ + ب حيث ﻡ ∝ س ، ب ∝ $س^{٢}$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١ ، كانت ص = ١٦ عندما س = ٢ أوجد قيمة ص عندما س = ـ ١

١٢ ـ إذا كان ما تدفعه إدارة مجلة من نقود مقابل أى مقال (م) يتناسب طردياً مع عدد الكلمات(ل) فإذا كانت إدارة المجلة تدفع ٧٢٠ جنيهاً لمقال من ١٢٠٠ كلمة فكم تدفع لمقال يتكون من ١٥٠٠ كلمة

١٣ ـ إذا كانت ص تتغير عكسياً بتغير س وكانت ص = ٣ عندما س = ٥ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٣

١٤ ـ إذا كان مربع الكمية ص تتغير عكسياً مع الجذر التكعيبى للكمية س وكانت س = ٨ عندما ص = ٣ أوجد قيمة س عندما ص = ١.٥

١٥ ـ إذا كانت س = ع + ٦ وكانت ع تتناسب عكسياً مع ص ، كانت س = ٢ عندما ص = ١ أوجد ص عندما س = ٤

١٦ ـ إذا كان ص = ﻡ + ب حيث ﻡ ∝ س ، ب تتغير عكسياً بتغير س ، كانت ص = ٣ عندما س ∈ { ١ ، ٢ } أوجد قيمة ص عندما س = ٤

١٧ ـ إذا كان ص = ﻡ ب حيث ﻡ تتغير بتغير مربع س ، ب تتغير عكسياً مع مكعب س وكانت ص = ٤ عندما س = ٢ أوجد قيمة س عندما ص = ٢

١٨ ـ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين وكان ٩ س ـ ٤ ص = ٧ س + ٢ ص أثبت أن س ∝ ص

٢٣ ـ إذا كان $ص^{٢}$ ـ ٢٥ $س^{٢}$ = ٠ أوجد ص : س ثم أثبت أن ص ∝ س

١٩ ـ إذا كان $\frac{٣س - ص}{س + ٣ص} = \frac{١}{٥}$ أثبت أن س ∝ ص

٢٠ ـ إذا كان ص ∝ س أثبت أن ($س^{٢}$ + $ص^{٢}$) ∝ س ص

٢١ ـ إذا كانت قوة الجذب (ق) بين مغناطيسين تتناسب عكسياً مع مربع المسافة وكانت المسافة بين المغناطيسين = ٢ سم عندما كان مقدار القوة = ١٨ نيوتن ، كم يكون مقدار المسافة بين المغناطيسين عندما يكون مقدار القوة مساوياً ٢ نيوتن

٢٢ ـ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كم في ٦ ساعات فكم كيلومتراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

٢٣ ـ إذا كان عدد الساعات " ﻫ " اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسياً مع عدد العمال " س " الذين يقومون بهذا العمل فإذا أنجز العمل ٦ عمال في أربع ساعات فما الزمن الذى يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل

٢٤ ـ إذا كان وزن جسم على القمر " و " يتناسب طردياً مع وزنه على الأرض " ر " و إذا كان الجسم يزن ٨٤ كجم على الأرض و وزنه ١٤ كجم على القمر فماذا يكون وزنه على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كجم