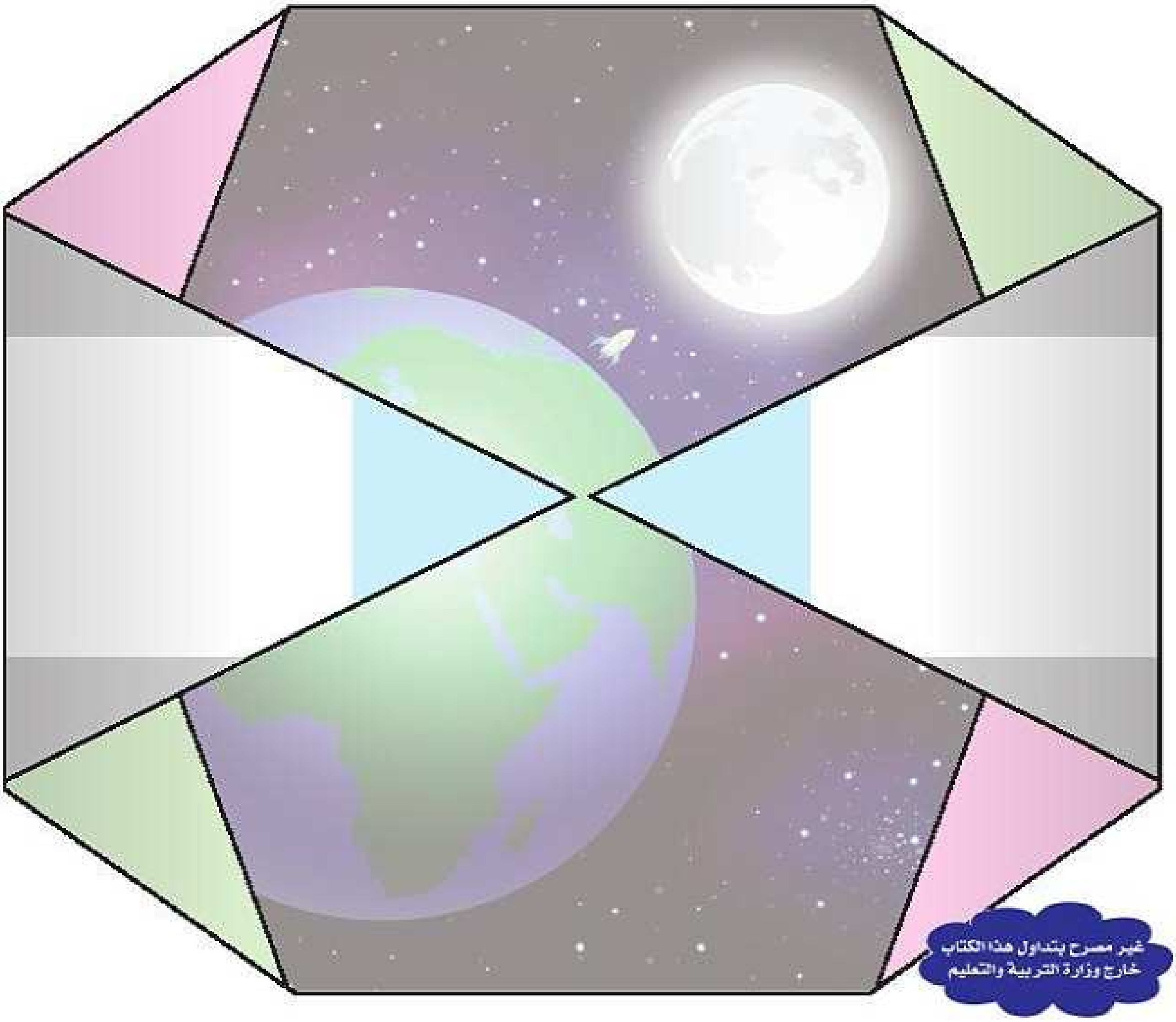
٣

الرياضيات

الصف الثالث الإعدادي

كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول



بسم الله الرحمن الرحيم

تأليف

الأستاذ/ **عمر فؤاد جاب الله**

الأستاذ الدكتور/ **عفاف أبو الفتوح صالح**

الدكتور/ **عصام وصفي روفائيل**

الأستاذ/ **سيرافيم الياس اسكندر**

الأستاذ/ **كمال يونس كبشة**

شركة الشمس للنشر

ش٠م٠م٠

العنوان: ٥ ميدان المساحة - برج الندى - الدقي، الجيزة، جمهورية مصر العربية

هاتف: ٣٣٦١٨٤٦٩ /٠٢

الطبعة الأولى: ٢٠١٠

رقم الإيداع: ٢٠١٠/٨٩٩٩

الرقم الدولي: 3 – 94 – 6294 – 977 – 978

مطابع الاعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

مقدمة الكتاب

ابناءنا الاعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم، وما سبق أن درستموه فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبا داخل المحتوى، كما ستجدون تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خاص بملف الإنجاز، واختبار فى نهاية كل وحدة، وفى نهاية الفصل الدراسى ستجدون اختبارات عامة تساعدكم على مراجعة المقرر كاملاً، وإرشادات لإجابات بعض التمارين.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الجبر

الوحدة الأولى: القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح والعمليات الحسابية عليها

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

حساب المثلثات

الوحدة الثالثة: حساب المثلثات

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الهندسة التحليلية

الوحدة الرابعة: الهندسة التحليلية

الهندسة المستوية

الوحدة الخامسة: الهندسة المستوية

الإحصاء

الوحدة السادسة: الإحصاء

الرموز الرياضية المستخدمة

ط	مجموعة الاعداد الطبيعية	$\perp$	عمودى على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$
ح	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$
$\sqrt{\text{أ}}$	الجذر التربيعى للعدد أ	ق ($\angle$ أ)	قياس زاوية أ
$\sqrt[3]{\text{أ}}$	الجذر التكعيبى للعدد أ	ق ($\frown$ أ ب)	قياس القوس أ ب
[أ ، ب]	فترة مغلقة	~	تشابه
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	<	أكبر من
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة	$\leqslant$	أكبر من أو تساوى
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة	>	أقل من
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	$\geqslant$	**أقل من أو تساوى**
$\equiv$	تطابق	ل(أ)	**احتمال وقوع الحدث أ**
ن (أ)	عدد عناصر الحدث أ	$\overline{\text{س}}$	**الوسط الحسابى**
ف	**فضاء العينة**	σ	**الانحراف العيارى**
		Σ	المجموع

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الجبر

الوحدة الأولى القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح و العمليات الحسابية عليها

الدرس الأول: القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح.

الدرس الثاني: قوانين القوى الصحيحة غير السالبة فى ح.

الدرس الثالث: قوانين القوى الصحيحة السالبة فى ح.

الدرس الرابع: العمليات الحسابية باستخدام القوى الصحيحة.

١ - ١

القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح

سوف تتعلم

- ☆ مفهوم القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة.

مصطلحات أساسية

- ☆ ح* مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.
- ☆ قوى صحيحة غير سالبة فى ح.
- ☆ قوى صحيحة سالبة فى ح.
- ☆ معادلة أسية فى ح.

أولاً: القوى الصحيحة غير السالبة:

فكر وناقش

سبق أن درست القوى الصحيحة فى مجموعة الأعداد النسبية ن:

أكمل:

(١) $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = (..........)^{...}$　　(٢) $\frac{-٢}{٣} \times \frac{-٢}{٣} \times \frac{-٢}{٣} \times \frac{-٢}{٣} = (..........)^{...}$

إذا كان أ ∈ ح، ن ∈ ص$^+$ **فإن** أ^{ن} = أ × أ × أ × أ × .... × أ

حيث أ مكرر كعامل ن من المرات.

أمثلة

(١) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = (\sqrt{٢})^{٥} = ٤\sqrt{٢}$.

(٢) $-\sqrt{٢} \times -\sqrt{٢} \times -\sqrt{٢} \times -\sqrt{٢} = (-\sqrt{٢})^{٤} = ٤$

(٣) $-\sqrt{٥} \times -\sqrt{٥} \times -\sqrt{٥} = (-\sqrt{٥})^{٣} = -٥\sqrt{٥}$

إذا كان أ ∈ ح* **فإن** أ$^{\text{صفر}}$ = ١

فمثلاً: $(\sqrt{٧})^{\text{صفر}} = ١$　،　$\left(\frac{-١}{\sqrt{١١}}\right)^{\text{صفر}} = ١$

ثانيًا: القوى الصحيحة السالبة

فكر وناقش

علمت أن $٥^{٣} \times ٥^{-٣} = ٥^{٣-٣} = ٥^{٠} = ١$

أكمل:

س^{م} × .... = ١　حيث　س ≠ ٠　،　م ≠ ٠

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

إذا كان $أ \in ح^*$ ، $ن \in ص^+$

فأن $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^ن}$ ، $أ^ن = \frac{١}{أ^{-ن}}$

فمثلاً: $(\sqrt{٣})^{-٤} = \frac{١}{(\sqrt{٣})^٤} = \frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{(-\sqrt{٣})^{-٣}} = (-\sqrt{٣})^٣ = -٣\sqrt{٣}$

تدرب

إذا كانت س = ٣ ، ص = $\sqrt{٢}$ ، فأوجد فى أبسط صورة قيمة كل من:

① $س^{-٢} ص^{-٤}$ ② $(س^{-٢} \times ص^٤)^{-٢}$ ③ $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-٢}$

أمثلة

① إذا كان $س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $ص = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $ع = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$. فأوجد قيمة: $س^٢ + (س ع)^٢ \times ص^٢$

الحل

المقدار $= س^٢ + س^٢ ع^٢ ص^٢ = س^٢ (١ + ع^٢ ص^٢)$

$$= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ \times [١ + \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^٢] = \frac{٣}{٤} \times [١ + \frac{٢}{٤} \times \frac{١}{٣}] = \frac{٣}{٤} \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧}{٨}$$

قاعدة هامة:

إذا كان $أ^م = أ^ن$ **فإن** م = ن لكل $أ \in ح - \{٠ ، ١ ، -١\}$

فمثلاً: إذا كان $(\sqrt{٢})^س = ٢\sqrt{٢}$ فإن $(\sqrt{٢})^س = (\sqrt{٢})^٣$ $\therefore$ س = ٣

إذا كان $أ^ن = ب^ن$ **فإن** أ = ب لكل $ن \in \{١ ، ٣ ، ٥ ، ...\}$ ، $|أ| = |ب|$ لكل $ن \in \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ...\}$

فمثلاً: $س^٥ = \frac{١}{٣٢}$ فإن $س^٥ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٥$ $\therefore س = \frac{١}{٢}$

② أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح:

أ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \frac{١٢٥}{٢٧}$ ب $(٣)^{س-٣} = (\sqrt{٣})^{س+٥}$

الحل

أ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \frac{١٢٥}{٢٧}$ $\therefore \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^٣$ $\therefore \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٣}$

$\therefore$ س + ٢ = -٣ $\therefore$ س = -٢ - ٣ $\therefore$ س = -٥ فتكون مجموعة الحل {-٥}

ب $\because [(\sqrt{٣})^{٢}]^{(\text{س}-٣)} = (\sqrt{٣})^{\text{س}+٥}$ $\therefore (\sqrt{٣})^{٢\text{س}-٦} = (\sqrt{٣})^{\text{س}+٥}$

$\therefore ٢\text{س} - ٦ = \text{س} + ٥$ $\therefore \text{س} = ١١$

مجموعة الحل $\{١١\}$

تدرب حساب عقلى

حل بمجرد النظر المعادلة: $\frac{١}{(\text{س}+٩)^{٤}} = ٠{,}٠٠٠١$ ماذا تلاحظ؟

تمارين (١ ــ ١)

أولاً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $٤^{٣} + ٤^{٣} + ٤^{٣} + ٤^{٣}$ يساوى:
أ $٤^{٣}$ ب $٤^{٤}$ جـ $٤^{١٢}$ د $٤^{٨١}$

(٢) $٠{,}٠٠٢ \times ٠{,}٠٥$ يساوى:
أ $١٠^{-٥}$ ب $١٠^{-٤}$ جـ $١٠^{٤}$ د $١٠^{٥}$

(٣) إذا كان $\text{س} = \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٣}}$ فإن $\text{س}^{-١}$ تساوى:
أ $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ب $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ جـ $\sqrt{٣}$ د ٢

(٤) إذا كان $٥^{\text{س}} = ٤$ فإن $٥^{\text{س}-١}$ تساوى:
أ $١{,}٢٥$ ب $٠{,}٨$ جـ $٠{,}١٢٥$ د $٠{,}٠٨$

(٥) إذا كانت $(\text{س} - ٥)^{\text{صفر}} = ١$ فإن $\text{س} \in$ ....
أ $\text{ح} - \{٥\}$ ب $\text{ح} - \{-٥\}$ جـ $\{٥\}$ د ح

ثانياً أوجد فى أبسط صورة قيمة كل من:

(١) $٣^{-١}$ (٢) $(\frac{١}{٤})^{-١}$ (٣) $(\frac{٣}{٢})^{-٣}$

(٤) $(\sqrt{٥})^{٤}$ (٥) $(-\sqrt{٣})^{-٢}$ (٦) $(\sqrt{٧})^{-٣}$

(٧) $(\frac{-١}{\sqrt{٢}})^{٦}$ (٨) $(٠{,}٠١)^{-٢}$ (٩) $(\frac{-\sqrt{٢}}{٢})^{-٤}$

ثالثاً

(١) إذا كانت س = ٢، ص = $\sqrt{٣}$، فأوجد فى أبسط صورة قيمة كل من:
أ $٣(\text{س}+\text{ص})^{٤}(\text{س}-\text{ص})^{٤}$ ب $(\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{س}-\text{ص}})^{-٢}$

(٢) أوجد قيمة س فى كل ممايأتى:
أ $٣^{\text{س}-٢} = ٨١$ ب $(\sqrt{٣})^{\text{س}-١} = ٩$ جـ $(٣٢)^{\text{س}-٣} = ٨^{٢\text{س}+١}$
د $٩^{٣\text{س}-٢} = ٧^{٣\text{س}-٢}$ هـ $٦^{\text{س}^{٢}-٤} = ٧^{\text{س}^{٢}-٤}$ و $٢٥ \times ٣^{\text{س}-١} = ٩ \times ٥^{\text{س}-١}$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

قوانين القوى الصحيحة غير السالبة فى ح

سوف تتعلم

- قوانين القوى الصحيحة غير السالبة فى ح.
- حل المسائل على القوى الصحيحة غير السالبة في ح.

مصطلحات أساسية

- قوى صحيحة غير سالبة.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

فكر وناقش

أولاً:

أكمل: $(\sqrt{٣})^{٢} \times (\sqrt{٣})^{٤} = (\text{..........})^{\text{.....}}$ ماذا تلاحظ ؟

> **إذا كان** $\text{أ} \in \text{ح}^*$ ، م، ن عددين صحيحين غير سالبين
>
> **فإن:** $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$

تعميم:

إذا كان $\text{أ} \in \text{ح}^*$ ، م، ن، ....، ل أعدادًا صحيحة غير سالبة

فإن: $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{.........} \times \text{أ}^{\text{ل}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}+\text{.........}+\text{ل}}$

من القانون السابق نجد أن: $(\sqrt{٣})^{٢} \times (\sqrt{٣})^{٤} = (\sqrt{٣})^{٢+٤} = (\sqrt{٣})^{٦} = ٢٧$

ثانيًا:

أكمل: $(\sqrt{٥})^{٧} \div (\sqrt{٥})^{٢} = (\text{..........})^{\text{.....}}$ ماذا تلاحظ ؟

> **إذا كان** $\text{أ} \in \text{ح}^*$ ، م، ن عددين صحيحين غير سالبين م $\geq$ ن
>
> **فإن:** $\text{أ}^{\text{م}} \div \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$

من القانون السابق نجد أن: $(\sqrt{٥})^{٧} \div (\sqrt{٥})^{٢} = (\sqrt{٥})^{٧-٢} = (\sqrt{٥})^{٤} = ٢٥$

ثالثًا:

أكمل: $(\sqrt{٢} \times \sqrt{٣})^{٢} = (\sqrt{٢})^{\text{.....}} \times (\text{........})^{\text{.....}} = \text{........} \times \text{.........} = \text{........}$

> **إذا كان** $\text{أ، ب} \in \text{ح}^*$ ، ن عددًا صحيحًا غير سالب
>
> **فإن:** $(\text{أ ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}}$

تعميم:

إذا كان أ، ب، جـ، ....، ك $\in \text{ح}^*$ ، ن عددًا صحيحًا غير سالب

فإن: $(\text{أ} \times \text{ب} \times \text{جـ} \times \text{....} \times \text{ك})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}} \times \text{جـ}^{\text{ن}} \times \text{....} \times \text{ك}^{\text{ن}}$

رابعًا:

أكمل: $\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}\right)^{٤} = \frac{(\ldots\ldots)^{\ldots\ldots}}{(\ldots\ldots)^{\ldots\ldots}} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

إذا كان أ، ب ∈ ح، فإن $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$، ن عدد صحيح غير سالب حيث ب ≠ ٠ ، أ ≠ ٠

تعميم: إذا كان أ، ب، جـ، .... ، ك ∈ ح، ن عددًا صحيحًا غير سالب فإن:

$\left(\frac{أ\,ب\,هـ \times \ldots\ldots \times ل}{جـ\,د\,و \times \ldots\ldots \times ك}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}\,ب^{ن}\,هـ^{ن} \ldots\ldots ل^{ن}}{جـ^{ن}\,د^{ن}\,و^{ن} \ldots\ldots ك^{ن}}$ حيث إن أيًا من عوامل المقام ≠ ٠

خامسًا:

أكمل: $(٢^{٢})^{٣} = (\ldots\ldots)^{\ldots} \times (\ldots\ldots)^{\ldots} \times (\ldots\ldots)^{\ldots} = (\ldots\ldots)^{\ldots}$. ماذا تلاحظ ؟

إذا كان أ، ب ∈ ح*، م، ن عددين صحيحين غير سالبين فإن $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$.

تعميم: إذا كان أ، ب، جـ، .... ، ك ∈ ح ، ن عدد صحيح غير سالب فإن:

$\left(\frac{ب^{م}\,هـ^{ل} \ldots\ldots}{و^{ك}\,د^{س} \ldots\ldots}\right)^{ن} = \frac{ب^{م ن}\,هـ^{ل ن} \ldots\ldots}{و^{ك ن}\,د^{س ن} \ldots\ldots}$ حيث أن أى من عوامل المقام ≠ ٠

مثال

اختصر كلا مما يأتى لأبسط صورة:

١) $\sqrt{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٣}$

٢) $\left((\sqrt{٢})^{٣} \times (-\sqrt{٢})^{٢}\right)^{٢}$

٣) $\frac{(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣}}{(\sqrt{٣})^{٤}}$

الحل

١) $\sqrt{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٣} = (\sqrt{٢})^{١+٢+٣} = (\sqrt{٢})^{٦} = ٨$

٢) $\left((\sqrt{٢})^{٣} \times (-\sqrt{٢})^{٢}\right)^{٢} = (٢\sqrt{٢} \times ٢)^{٢} = (٤\sqrt{٢})^{٢} = ١٦ \times ٢ = ٣٢$

٣) $\frac{(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣}}{(\sqrt{٣})^{٤}} = (\sqrt{٣})^{٥+٣-٤} = (\sqrt{٣})^{٤} = ٩$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تمارين (١ - ٢)

أولاً اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١ أي مما يأتي هو الأقرب إلى $١١^{٢} + ٩^{٢}$؟

أ $٢٢ + ١٨$ ب $٢١١ + ٢٩$ جـ $١٢٠ + ٢٠$ د $١٢٠ + ٨٠$

٢ قيمة المقدار: $(٢)^{٢٠} + (٢)^{٢١}$ تساوي:

أ ٢×٢^{٤٠} ب ٢×٢^{٤١} جـ ٣×٢^{٢٠} د ٣×٢^{٢١}

٣ قيمة المقدار: $(٣)^{صفر} + (-\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{-٢٧}}$ تساوي:

أ صفر ب $\frac{١}{٣}$ جـ ١ د ٣

٤ سدس العدد: $٢^{١٢} \times ٣^{١٢}$ هو:

أ $٦^{٢}$ ب $٦^{٤}$ جـ $٦^{١١}$ د $٦^{٢٣}$

٥ قيمة المقدار: $٢^{٥} + (\sqrt{٢})^{١٠}$ يساوي:

أ $٢^{٦}$ ب $٢^{١٠}$ جـ $(\sqrt{٢})^{١٥}$ د $(\sqrt{٢})^{٢٠}$

ثانياً اختصر لأبسط صورة:

١ $(\sqrt{٢})^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٤}$

٢ $(-\sqrt{٥})^{٩} \div (-\sqrt{٥})^{٥}$

٣ $\left(\frac{٣\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٣}}\right)^{٤}$

٤ $\frac{(\sqrt{٣})^{٧} \times (\sqrt{٣})^{٨}}{(\sqrt{٣})^{٦}}$

ثالثاً

١ إذا كان $أ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $ب = -١$ فأوجد قيمة $٧أ^{٦} + (١ - ب)^{-٣}$

٢ إذا كان $أ = \sqrt{٣}$ ، $ب = \sqrt{٢}$ فأوجد قيمة:

أ $أ^{٤} - ب^{٤}$. ب $\frac{أ^{٤}}{ب^{٤}}$.

٣ إذا كان $س = ٢\sqrt{٢}$ ، $ص = ٣$. فأوجد قيمة المقدار: $(س^{٢} - ص^{٢})^{٣}$.

٤ إذا كان $\left(\sqrt{\frac{٣}{٢}}\right)^{س} = \frac{٤}{٩}$. فأوجد قيمة $(\frac{٣}{٢})^{س+١}$.

١ - ٣ قوانين القوى الصحيحة السالبة فى ح

تعميم قوانين الأسس

إذا كان أ، ب $\in$ ح*، م، ن $\in$ ص فإن:

- $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$
- $\text{أ}^{\text{م}} \div \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$
- $(\text{أب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}}$
- $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$
- $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م ن}}$

سوف تتعلم

- تعميم قوانين القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح.

مصطلحات أساسية

- قوى صحيحة سالبة.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

ملاحظات:

١ إذا كان أ $\in$ ح*، ن $\in$ ص_+ فإن $\text{أ}^{\text{ن}}$، $\text{أ}^{-\text{ن}}$ كل منهما معكوس ضربى للآخر، فإن $\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{أ}^{-\text{ن}} = ١$

مثال: $(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{-٥} = ١$

٢ إذا كان أ، ب $\in$ ح*، ن $\in$ ص_+ فإن $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{-\text{ن}}$

مثال: $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{٥} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٥}$ ، حيث: $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{٥} \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٥} = ١$

أمثلة

١ أوجد فى أبسط صورة قيمة كل من:

أ $٥\,(\sqrt{٥})^{-١}$ ب $\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٤}$ جـ $\frac{٢^{-١} \times ٤}{٣^{-١}}$

الحل

أ $٥\,(\sqrt{٥})^{-١} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٥} = \sqrt{٥}$

ب $\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٤} = \left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{+٤} = \frac{٤}{٩}$

جـ $\frac{٢^{-١} \times ٤}{٣^{-١}} = \frac{٣ \times ٤}{٢} = ٦$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٢ اختصر لأبسط صورة $\dfrac{(١٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣} \times (٣)^{٣}}{٩ \times (\sqrt{٥})^{-٣}}$

الحل

المقدار $= \dfrac{(٣)^{-٢} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣} \times (٣)^{٣}}{(٣)^{٢} \times (\sqrt{٥})^{-٣}} = (٣)^{-٢+٣-٢} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣+٣}$

$= (٣)^{-١} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٦} = \dfrac{١}{٣} \times (٥)^{-٢} \times (٥)^{٣} = \dfrac{١}{٣} \times (٥)^{١} = \dfrac{٥}{٣}$

٣ إذا كان $\dfrac{٤٩^{\text{ن}} \times ٢٥^{٢\text{ن}} \times ٣^{٤\text{ن}}}{٧^{-\text{ن}} \times ١٥^{٤\text{ن}}} = ٣٤٣$. فأوجد قيمة $٦^{٢\text{ن}}$

الحل

$\because \dfrac{٤٩^{\text{ن}} \times ٢٥^{٢\text{ن}} \times ٣^{٤\text{ن}}}{٧^{-\text{ن}} \times ١٥^{٤\text{ن}}} = ٣٤٣$ $\therefore \dfrac{٧^{٢\text{ن}} \times ٥^{٤\text{ن}} \times ٣^{٤\text{ن}}}{٧^{-\text{ن}} \times ٥^{٤\text{ن}} \times ٣^{٤\text{ن}}} = ٣٤٣$

$\therefore ٧^{٢\text{ن} + \text{ن}} = ٣٤٣$ $\therefore ٧^{٣\text{ن}} = ٧^{٣}$

$\therefore ٣\text{ن} = ٣$ $\therefore \text{ن} = ١$ $\therefore ٦^{٢\text{ن}} = ٦^{٢ \times ١} = ٣٦$

تمارين (١ - ٣)

أولاً: أكمل ما يأتي:

١ أبسط صورة للمقدار: $٢^{\text{صفر}} + (٢)^{-١} - \left(\dfrac{-١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} =$ ....

٢ إذا كانت $\text{س} = (\sqrt{٢} + ٣)^{٥}$ ، $\text{ص} = (\sqrt{٢} + ٣)^{-٥}$ فإن س ص = ...

٣ $\text{أ}^{-٤} + ١ = \text{أ}^{-٤}$ (.......... + ...) حيث $\text{أ} \neq ٠$

٤ إذا كانت $٢^{\text{س}} \times ٥^{-\text{س}} = ٢,٥$ فإن س = ...

٥ إذا كانت $٤^{\text{س} - ١٠} = \dfrac{١}{١٦}$ فإن $\sqrt{\text{س}} =$ ....

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١ إذا كان $٥^{\text{س}} = ٤$ فإن $٥^{\text{س} - ١}$ تساوي:
أ ١,٢٥ ب ٠,٨ جـ ٠,١٢٥ د ٠,٠٨

٢ $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٩} (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٩}$ يساوي:
أ ١ ب $\sqrt{٥}$ جـ $\sqrt{٦}$ د ٥

٣ إذا كان $٣^{\text{س}} = ٥$ ، $\dfrac{١}{٣^{\text{ص}}} = ٧$ فإن $٣^{\text{س}+\text{ص}} =$ ....
أ $\dfrac{٥}{٧}$ ب $\dfrac{٧}{٥}$ جـ ٢ د ١٢

٤ إذا كان $٢^{س-١} \times ٣^{١-س} = \frac{٩}{٤}$ فإن س = ...

أ -٣ ب -١ جـ ١ د ٣

ثالثاً: أوجد فى أبسط صورة قيمة كل ممايأتى:

١ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)^{-٥}$ ٢ $(\sqrt{٣})^{-٤} \times (-\sqrt{٢})^{٤}$ ٣ $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٥} \div \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

رابعاً اختصر كلاً مما يأتى إلى أبسط صورة:

١ $\frac{(\sqrt{٣})^{-٥} \times (\sqrt{٣})^{-٤}}{(\sqrt{٣})^{-١٠}}$ ٢ $\frac{(١٠)^{٣} \times (١٠)^{-٧}}{(٠,١)^{٣} \times ٠,٠٠١}$

خامساً: أوجد قيمة س فى كل ممايأتى:

١ $٢^{س} = ٣٢$ ٢ $٢^{س-٣} = ١$ ٣ $٣^{س-٢} = \frac{١}{٩}$

٤ $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢س-١} = \frac{٨}{١٢٥}$ ٥ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-٤} = ٢\frac{١}{٤}$ ٦ $٥^{س^{٢}-٤} = ٧^{٤-س^{٢}}$

سادساً

١ إذا كان $٣^{س} = ٢٧$، $٤^{س+ص} = ١$. فأوجد قيمة س، ص.

٢ أثبت أن: $\frac{(٢٧)^{س-١} \times ٨^{س}}{(٢\sqrt{٢})^{٢س} \times (٣\sqrt{٣})^{٢س}} = \frac{١}{٢٧}$

٣ إذا كان: $\frac{٨^{س} \times ٩^{س}}{(١٨)^{س}} = ٦٤$ فأوجد س ثم أوجد قيمة $(٤)^{-س}$

٤ اختصر: $\frac{٤^{س+١} \times ٩^{٢-س}}{٦^{٢س}}$ فى أبسط صورة ثم احسب قيم الناتج عند س =١.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

١ - ٤

العمليات الحسابية على القوى الصحيحة

سوف تتعلم

- إجراء العمليات (+ ، − ، × ، ÷) على القوى الصحيحة.

مصطلحات أساسية

- قوى صحيحة غير سالبة.
- قوى صحيحة سالبة.
- ترتيب العمليات.

فكر وناقش

أولاً: أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

(١) $\frac{١}{(\sqrt{٣})^{٥}} \div ٩\sqrt{٣}$ (٢) $\frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} - \frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٢\sqrt{٢}}$

سبق أن درسنا أن:

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}$ (حيث كل من ب، د ≠ ٠)

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}}$ (حيث كل من ب، جـ، د ≠ ٠)

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ د} + \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$ (حيث كل من ب، د ≠ ٠)

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$ (حيث كل من ب، د ≠ ٠)

ثانياً: باستخدام الحساب العقلى أوجد: $٣ \times ٢^{٢} - ٦ \div ٣ \times ٥ + ٤$.

وللتحقق من ذلك باستخدم الآلة الحاسبة .

عند إجراء العمليات الحسابية يراعى ترتيب العمليات الآتية:

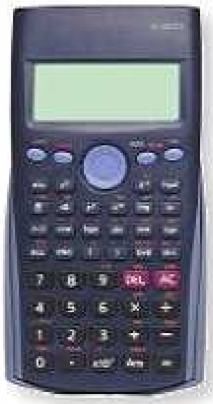
(١) إجراء العمليات داخل الأقواس الداخلية ثم الخارجية إن وجدت.

(٢) حساب قوى الأعداد.

(٣) إجراء عمليات الضرب أو القسمة من اليمين إلى اليسار.

(٤) إجراء عمليات الجمع أو الطرح من اليمين إلى اليسار.

وهذا هو نفس الترتيب المستخدم فى الآلات الحاسبة.



أمثلة

١ أوجد ناتج كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أ) $٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \div ٦^{-٤}$

ب) $(\sqrt{٥})^{٥} \div ٥\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

جـ) $\frac{٢(\sqrt{٣})^{٥} \div ٣\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣} + (\sqrt{٣} - ١)^{٢}}$

د) $\frac{٤ \times ٣^{س+١} - ١١ \times ٣^{س-١}}{٢ \times ٣^{س} + ٧ \times ٣^{س-٢}}$

الحل

أ) $٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \div ٦^{-٤} = ٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \times ٦^{٤}$

$= ٢^{-٣} \times ٣^{-٢} \times ٢^{٤} \times ٣^{٤} = ٢^{-٣+٤} \times ٣^{-٢+٤}$

$= ٢^{١} \times ٣^{٢} = ٢ \times ٩ = ١٨$

وتستخدم الآلة الحاسبة للتأكد من صحة ناتج العملية السابقة على النحو الآتي:

ابدأ → 2 [x■] [(–)] 3 [×] 3 ▶ [x■] [(–)] 2 ▶ [÷] 6 [x■] [(–)] 4 ▶ [=]

ب) $(\sqrt{٥})^{٥} \div ٥\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = (\sqrt{٥})^{٥} \div (\sqrt{٥})^{٣} + ٢(\sqrt{٣})^{٢}$

$= (\sqrt{٥})^{٥-٣} + ٢ \times ٣ = (\sqrt{٥})^{٢} + ٦ = ٥ + ٦ = ١١$

استخدم الآلة الحاسبة للتأكد من صحة ناتج العملية السابقة.

جـ) $\frac{٢(\sqrt{٣})^{٥} \div ٣\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣} + (\sqrt{٣} - ١)^{٢}} = \frac{٢ \times ٩\sqrt{٣} \div ٣\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣} + (٣ + ١ - ٢\sqrt{٣})}$

$= \frac{١٨\sqrt{٣} \div ٣\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣} + (٤ - ٢\sqrt{٣})} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

د) $\frac{٤ \times ٣^{س+١} - ١١ \times ٣^{س-١}}{٢ \times ٣^{س} + ٧ \times ٣^{س-٢}} = \frac{٤ \times ٣^{س} \times ٣^{١} - ١١ \times ٣^{س} \times ٣^{-١}}{٢ \times ٣^{س} + ٧ \times ٣^{س} \times ٣^{-٢}}$

$= \frac{٣^{س}\left(١٢ - \frac{١١}{٣}\right)}{٣^{س}\left(٢ + \frac{٧}{٩}\right)} = \frac{١٢ - \frac{١١}{٣}}{٢ + \frac{٧}{٩}} = \frac{\frac{٣٦ - ١١}{٣}}{\frac{١٨ + ٧}{٩}} = \frac{٢٥}{٣} \times \frac{٩}{٢٥} = ٣$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٢ إذا كان $أ = \sqrt{٢}$ ، $ب = \sqrt{٣}$. فأوجد القيمة العددية لكل من:

أ $\frac{ب^٤ - أ^٤}{ب^٢ + أ^٢}$ ب $\frac{أ^٣ + ب^٣}{أ + ب}$

الحل

أ $\frac{ب^٤ - أ^٤}{ب^٢ + أ^٢} = \frac{(ب^٢ + أ^٢)(ب^٢ - أ^٢)}{ب^٢ + أ^٢}$

$= ب^٢ - أ^٢ = (\sqrt{٣})^٢ - (\sqrt{٢})^٢ = ٣ - ٢ = ١$

ب $\frac{أ^٣ + ب^٣}{أ + ب} = \frac{(أ + ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)}{أ + ب} = أ^٢ - أب + ب^٢$ $(أ \neq - ب)$

$= (\sqrt{٢})^٢ - \sqrt{٢} \times \sqrt{٣} + (\sqrt{٣})^٢ = ٢ - \sqrt{٦} + ٣ = ٥ - \sqrt{٦}$

٣ إذا كان $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ١٠$ فأوجد قيمة س.

الحل

$٢^{س} \times ٢^{١} + ٢^{س} \times ٢^{-١} = ١٠$ $\therefore ٢^{س}(٢ + \frac{١}{٢}) = ١٠$ $\therefore ٢^{س} \times \frac{٥}{٢} = ١٠$

$\therefore ٢^{س} = \frac{٢}{٥} \times ١٠$ $\therefore ٢^{س} = ٤ = ٢^{٢}$ $\therefore س = ٢$

التحقق:

الطرف الأيمن $= ٢^{٢+١} + ٢^{٢-١} = ٢^{٣} + ٢^{١} = ٨ + ٢ = ١٠ =$ الطرف الأيسر.

تدرب

١ **(الربط بالأعمال التجارية)**

إذا كان $حـ = م(١ + ر)^{ن}$ حيث (حـ) جملة المبلغ م بالجنيه، (ر) ربح الجنيه فى السنة، (ن) عدد السنوات. فأوجد (حـ) لأقرب جنيه، حيث أن $م = ٢,٥ \times ١٠^{٤}$ ، $ر = ٩,٨ \times ١٠^{-٢}$ ، $ن = ١٢$.

٢ أثبت أن $\frac{٢^{٣س+٣} - ٢^{٣س+١}}{٤ \times ٢^{٣س} - ٦ \times ٢^{٣س-١}} = ٦$

٣ إذا كان $\frac{٢^{س+١} - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س-١}} = ٢^{س-٢}$ فاوجد قيمة س.

تمارين عامة

أولاً: أكمل ما يأتى:

١) أبسط صورة للمقدار: $٢^{-٣} \times ٢^{-٢} \div ٤^{-٣} =$ ....

٢) أبسط صورة للمقدار: $(٣^{-٢})^{٣} \div ٩^{-٣} \times (-٢)^{-١} =$ ....

٣) أبسط صورة للمقدار: $٤^{٣} \times ٣^{-٢} \times (\sqrt[٣]{-٨})^{-٥} =$ ....

٤) إذا كان: $٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س} = ١$ فإن س = ...

٥) $\frac{٢^{س} \times ٣^{س}}{(١٢)^{س}} = \frac{١}{٢}$ فإن س = ...

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١) المقدار: $\frac{٣^{س} \times ٣^{س} \times ٣^{س}}{٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س}}$ يساوى

أ $٣^{٢س - ١}$ ب $٣^{١ - ٢س}$ جـ $٣^{س^{٢} - ٣س}$ د $٣^{٣س - س^{٢}}$

٢) القيمة العددية للمقدار: $\frac{٢^{٢ن + ١} \times ٥^{٢ن + ١}}{١٠^{٢ن}}$ تساوى:

أ $\frac{١}{١٠}$ ب ٧   جـ ١٠   د ١٠٠

٣) $(٥^{س + ٢} - ٥^{س + ١}) \div ٥^{س} =$

أ ٥   ب ١٠   جـ ١٥   د ٢٠

٤) قيمة س التى تحقق المعادلة: $٢^{س} + ٢^{س+١} = \frac{٣}{٢}$ هى:

أ -٢   ب -١   جـ ١   د ٢

ثالثاً:

١) ضع الأقواس المناسبة لكل مما يأتى حتى تكون العبارة الرياضية صحيحة:

أ $(\sqrt{٣})^{٢} + \sqrt{١٥} \div \frac{١}{\sqrt{٥}} - \sqrt{١٢} = ٢\sqrt{٣}$

ب $(\frac{١}{٢})^{-٤} - (\sqrt{٢})^{٤} \div \sqrt[٣]{٨} \times (\frac{١}{\sqrt{٥}})^{-٢} = ٣٠$

جـ $٢٤ \div \sqrt[٣]{٢٧} + (\frac{١}{\sqrt{٣}})^{-٤} \times \left(\sqrt{\frac{١}{٢}}\right)^{-٢} = ٤$

٢) إذا كانت $س = ٢ + \sqrt{٣}$ ، $ص = ٢ - \sqrt{٣}$ ، فأوجد قيمة المقدار: $\frac{س^{٧} ص^{٨} - ص}{(س + ص)^{٩}}$ في أبسط صورة.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

③ أثبت أن:

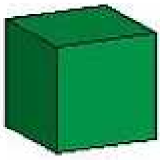
(أ) $\dfrac{3^{\text{س}+1} + 3^{\text{س}+2}}{3^{\text{س}}} = 12$ (ب) $\dfrac{16 \times 2^{2\text{س}} - 2 \times 4^{\text{س}}}{2 \times 4^{\text{س}} + 5 \times 2^{2\text{س}}} = 2$

④ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

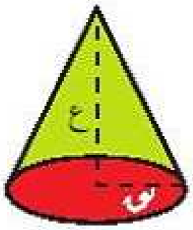
(أ) $2^{\text{س}+1} - 2^{\text{س}} = 2$ (ب) $3^{\text{س}+1} - 3^{\text{س}-2} = 78$

(جـ) $2^{2\text{س}+1} + 2^{2\text{س}-1} = 10$ (د) $9^{\text{س}} - 4 \times 3^{\text{س}} + 3 = 0$

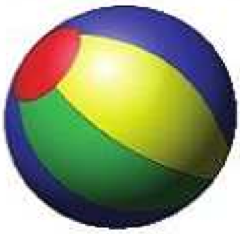
⑤ إذا كان: $\dfrac{(27)^{\text{س}-1} \div (3)^{-3\text{س}}}{(3\sqrt{3})^{2\text{س}} \times (3\sqrt{3})^{2\text{س}}} = 3^{\text{س}}$. فأوجد قيمة س.



⑥ **الربط بالهندسة** إذا كانت المساحة الكلية لمكعب تساوى $3{,}375 \times 10^{2}$ سم² مساحة؛ فأوجد: (أ) طول حرف المكعب. (ب) حجم المكعب.



⑦ **الربط بالهندسة** إذا كان حجم المخروط الدائرى القائم يعطى بالعلاقة: $ح = \frac{1}{3}\,ط\,نق^{2}\,ع$. فأوجد ارتفاع المخروط ع إذا علم أن حجم المخروط $7{,}7 \times 10^{2}$ سم³ وطول قطر قاعدته ١٤ سم. [اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$]



⑧ **الربط بالهندسة** إذا كان حجم الكرة $ح = \frac{4}{3}\,\pi\,نق^{3}$ فأوجد طول نصف قطر كرة حجمها $3{,}8808 \times 10^{4}$ سم³ [اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$]

⑨ إذا كان: $حـ = \dfrac{أ(ر^{ن} - 1)}{ر - 1}$ وكانت $أ = 128$، $ر = \frac{3}{2}$، $حـ = 6{,}305 \times 10^{3}$؛ فأوجد ن.

الربط بالتكنولوجيا

لإيجاد ناتج المقدار: $\dfrac{(15)^{-2} \times (\sqrt{5})^{3} \times (3)^{3}}{9 \times (\sqrt{5})^{-3}}$ (الناتج = $\frac{5}{3}$)

إرشاد

نتبع الخطوات التالية باستخدام الآلة الحاسبة العلمية:

ابدأ → 15 [x■] [(−)] 2 ▶ [×] [√■] 5 [x■] 3 ▶ [×] 3 [x■] 3 ▶

[=] [÷] [(] 9 [×] [√■] 5 [x■] [(−)] 3 ▶ [)] [=]

ملف الإنجاز

١ **أوجد** فى أبسط صورة كل من: $(\sqrt{٣}+٢)^{١١}\,(\sqrt{٣}-٢)^{١١}$

٢ **إذا** كان $أ=\sqrt{٧}$ ، $ب=(\sqrt{٧})^{-١}$ ؛ فأوجد قيمة: $أ^{١٠١}\,ب^{١٠٠}$

٣ **أوجد** فى أبسط صورة قيمة:

$$\frac{١}{١-\sqrt{٣}}-\frac{١}{\sqrt{٣}-\sqrt{٥}}+\frac{١}{\sqrt{٥}-\sqrt{٧}}-\frac{١}{\sqrt{٧}-\sqrt{٩}}+\frac{١}{\sqrt{٩}-\sqrt{١١}}-\frac{١}{\sqrt{١١}-\sqrt{١٣}}+\frac{١}{\sqrt{١٣}-\sqrt{١٥}}$$

إرشاد: اضرب كل كسر فى مرافق الكسر.

اختبار الوحدة

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

١ الرقم فى خانة آحاد العدد $٣^{١٢٣}\times ٢^{١٤}$ هو :

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٦ هـ ٨

٢ إذا كانت: $س\neq ٠$ ، $س+\frac{١}{س}=\sqrt{٣}$ فإن $س^{٢}+\frac{١}{س^{٢}}=$

أ ١ ب ٣ جـ ٥ د ٧ هـ ٩

٣ كم عدد من الأعداد التي تبدأ من ١٠٠٠ وتنتهي بـ ٩٩٩٩ كل أرقامها زوجية؟

أ ٣×٥^{٣} ب ٤×٥^{٣} جـ ٣×٥^{٤} د ٤×٥^{٤} هـ ٥×٥^{٤}

ثانياً:

١ **اختصر لأبسط صورة كلاً مما يأتي:**

أ $\left((-٥)^{٣}\right)^{٢}\times(-\sqrt{٥})^{-٤}$

ب $\dfrac{٨^{ن-١}\times ٣٢^{-ن}}{٣٢\times ٤^{-ن}}$

جـ $\dfrac{٨\times ٢^{٢س}+٢\times(٢^{س})^{٢}}{\frac{٣}{٢}\times ٢^{٢س}-٢^{س}\times ٢^{س}}$

٢ **أوجد قيم س في كل مما يأتي:**

أ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س+٥}=\left(٣\frac{٣}{٨}\right)^{-٢}$

ب $٥^{س^{٢}-٥س}=٠{,}٠٠١٦$

٣ إذا كان: $ف=م\times\frac{(١+ر)^{-ن}}{ر}$ حيث (ف) القيمة الحالية لمبلغ $م=٣{,}١٢\times ١٠^{٥}$ جنيه بفائدة مركبة مقدارها ٨٪ لمدة ن = ١٠ سنوات؛ فأوجد ن لأقرب جنيه.

٤ **السكان:** **إذا كان عدد السكان (ص) بالمليون في إحدى الدول يتحدد من العلاقة:**

$(ص)=١١{,}٧\,(١{,}٠٢)^{س}$ حيث س عدد السنين بدءًا من عام ٢٠٠٥.

فأوجد لأقرب مليون عدد السكان المتوقع لهذه الدولة أ عام ٢٠١١ ب عام ٢٠٠٠

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الجبر

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

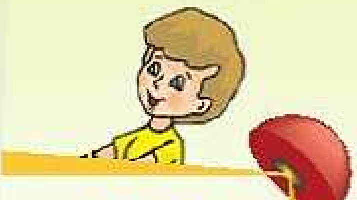
هل تعلم ؟

أن وزن الجسم على سطح القمر يساوى $\frac{1}{6}$ وزنه على سطح الأرض

تصور أنك ذهبت فى رحلة للقمر، كم سيصبح وزنك؟

١ - ٢

النسبة



سوف تتعلم

- مفهوم النسبة.
- خواص النسبة.

المصطلحات الأساسية

- مقدم النسبة.
- تالى النسبة.
- حدا النسبة.

فكر و ناقش

درسنا فيما سبق موضوع النسبة، وعلمنا أن النسبة هى: مقارنة بين كميتين.

فمثلاً: إذا كان هناك ٤ أولاد، ٣ بنات، فإن النسبة بين عدد الأولاد إلى عدد البنات يمكن كتابتها بإحدى الصور ٤ إلى ٣ أو $\frac{٤}{٣}$.

وعمومًا إذا كان **أ**، ب عددين حقيقيين **فإن النسبة**

بين العدد أ والعدد ب

تكتب بإحدى الصور: **أ** إلى ب أو **أ** : ب أو $\frac{أ}{ب}$.

ويسمى **أ** مقدم النسبة، ويسمى ب تالى النسبة، ويسمى **أ**، ب معًا **بحدى النسبة.**

أكمل وأجب عن الأسئلة:

(١) هل تتغير النسبة إذا ضرب كل من حديها فى مقدار ثابت لا يساوى الصفر؟

$$\frac{٣}{٥} \overset{?}{=} \frac{٣ \times ....}{٥ \times ....}$$

(٢) هل تتغير النسبة إذا أضفنا عددًا حقيقيًا لكل من حديها؟

$$\frac{٢}{٣} \overset{?}{=} \frac{٢ + ...}{٣ + ...}$$

(٣) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$، هل **أ** = ٣، ب = ٥ لجميع قيم **أ**، ب؟

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

مثال

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد س.

$\therefore \frac{\text{س} + ٧}{\text{س} + ١١} = \frac{٢}{٣}$ $\qquad \therefore ٣ (\text{س} + ٧) = ٢ (\text{س} + ١١)$

$\therefore ٣\text{س} + ٢١ = ٢\text{س} + ٢٢$ $\qquad \therefore ٣\text{س} - ٢\text{س} = ٢٢ - ٢١$

$\therefore \text{س} = ١١$

تدرب

أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥.

تمارين (٢ ـ ١)

١. عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧، إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣؛ **أوجد العددين**؟

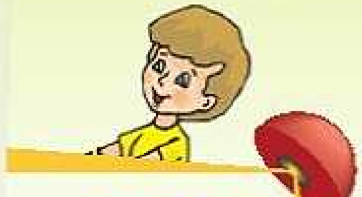
٢. عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣، و إذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثانى ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ ؛ **أوجد** العددين.

٣. **أوجد** العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$.

٤. **أوجد** العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥.

٢ - ٢

التناسب



سوف تتعلم

- مفهوم التناسب
- خواص التناسب
- التناسب المتسلسل

المصطلحات الأساسية

- تناسب
- أول متناسب
- ثانى متناسب
- ثالث متناسب
- رابع متناسب
- طرفا التناسب
- وسطا التناسب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه **يقال إن** أ، ب، جـ، د كميات متناسبة، و إذا كانت الكميات أ، ب، جـ، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

تعريف:

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر.

فى التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فان أ يسمى **(الأول المتناسب)**، ب يسمى **(الثانى المتناسب)**، جـ يسمى **(الثالث المتناسب)**، د يسمى **(الرابع المتناسب)**.

كما يسمى أ، د **طرفى التناسب**، ب، جـ **وسطى التناسب**.

خواص التناسب

أولاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن:

١) أ = م جـ ، ب = م د حيث م ∋ ح*

٢) أ د = ب جـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

٣) $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص السابقة بإعطاء أمثلة عددية من عندك

ثانيًا: إذا كان: أ د = ب جـ فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص بالمثال العددى الآتى:

تعلم أن: ٤ × ٨ = ٢ × ١٦

فإن: $\frac{٤}{٢} = \frac{.....}{.....}$ ، $\frac{٤}{١٦} = \frac{.....}{.....}$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

مثال ١

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة: $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

الحل

نفرض أن س = ٢م، ص = ٣م (حيث م ثابت ≠ صفر)

$\therefore \frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٦ \times ٣م - ٢م} = \frac{١٢م}{١٦م} = \frac{٣}{٤}$

حل آخر:

بقسمة كل من البسط والمقام على ص ثم التعويض عن قيمة $\frac{س}{ص}$

$\therefore$ المقدار $= \frac{٣ \times \frac{س}{ص} + ٢}{٦ - \frac{س}{ص}} = \frac{٣ \times \frac{٢}{٣} + ٢}{٦ - \frac{٢}{٣}}$ ⟵ **أكمل** $= \frac{...}{\frac{...}{...}} = \frac{...}{...}$

مثال ٢

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤، ١٢، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب س

$\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

$\therefore ٤ \times س = ١٢ \times ١٦$ [حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين]

$\therefore$ س $= \frac{١٢ \times ١٦}{٤} = ٤٨$ $\therefore$ الرابع المتناسب = ٤٨

مثال ٣

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣، ٥، ٨، ١٢ فإنها تكون متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد س فتكون الأعداد ٣ + س، ٥ + س، ٨ + س، ١٢ + س **متناسبة**

$\therefore \frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٨ + س}{١٢ + س}$ $\therefore$ (٥ + س) (٨ + س) = (٣ + س) (١٢ + س)

$\therefore ٤٠ + ١٣س + س^٢ = ٣٦ + ١٥س + س^٢$ $\therefore$ ١٥س - ١٣س = ٤٠ - ٣٦

$\therefore$ ٢س = ٤ $\therefore$ س = ٢

تدرب

① أ أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢، .... ، ٤، ٦

ب أوجد الثالث المتناسب للأعداد ٨، ٦، .... ، ١٢

② إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة ٧ أ + ٩ ب : ٤ أ + ٢ ب

ثالثاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ...$ ، $م_١$، $م_٢$، $م_٣$، ... $\in$ ح*

فإن: $\frac{أ م_١ + جـ م_٢ + هـ م_٣ + ...}{ب م_١ + د م_٢ + و م_٣ + ...}$ = إحدى النسب

فمثلا: إذا كان: $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤}$ بضرب حدى النسبة الأولى فى ٢ وحدى النسبة الثانية فى -٥ وحدى النسبة الثالثة فى ٣ فإن $\frac{٢أ - ٥ب + ٣جـ}{٢ \times ٢ - ٥ \times ٣ + ٣ \times ٤}$ = إحدى النسب

أى أن: ٢أ - ٥ب + ٣جـ = إحدى النسب

مثال ٥

إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$

الحل

∵ إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٥ والثانية فى ٣ فإن مجموع المقدمات: مجموع التوالى = إحدى النسب.

∴ $\frac{٥أ + ٣جـ}{٥ب + ٣د}$ = إحدى النسب (١)

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٣ والثانية فى -٢ فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب.

∴ $\frac{٣أ - ٢جـ}{٣ب - ٢د}$ = إحدى النسب (٢)

من (١)، (٢) ∴ $\frac{٥أ + ٣جـ}{٥ب + ٣د} = \frac{٣أ - ٢جـ}{٣ب - ٢د}$

∴ $\frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$ (وهو المطلوب إثباته)

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

حل آخر:

افرض $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت

أ = ب م ، جـ = د م وعوض فى كلا الطرفين.

تدرب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ **فاثبت أن:**

أولاً: $\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+د}{د}$ **ثانيًا:** $\frac{أ-ب}{ب} = \frac{جـ-د}{د}$

إرشاد: افرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت $\neq$ ٠ وأكمل أو بأى طريقة أخرى.

التناسب المتسلسل

٢، ٦، ١٨ ثلاثة أعداد. قارن بين النسب $\frac{٢}{٦}$، $\frac{٦}{١٨}$

١ هل توجد علاقة بين $(٦)^٢$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

٢ إذا استبدل العدد ٦ بالعدد (-٦) هل توجد علاقة بين $(-٦)^٢$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

تعريف:

يقال للكميات أ، ب، جـ إنها فى تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

يسمى أ بالأول المتناسب، ب بالوسط المتناسب، جـ بالثالث المتناسب

حيث: $ب^٢ =$ أ جـ أو ب = $\pm \sqrt{أ جـ}$

مثال ٦

أوجد الوسط المتناسب بين ٣، ٢٧

الحل

الوسط المتناسب = $\pm \sqrt{٣ \times ٢٧} = \pm ٩$

مثال ٧

إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فاثبت أن:** $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}}=\frac{أ}{جـ}$

الحل

ب وسط متناسب بين أ، جـ   أي أ، ب، جـ فى تناسب متسلسل

نفرض $\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=م$ $\therefore$ ب = جـ م، أ = ب م = جـ م × م = جـ م^{٢}

الطرف الأيمن = $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}}=\frac{جـ^{٢}م^{٤}+جـ^{٢}م^{٢}}{جـ^{٢}م^{٢}+جـ^{٢}}$

$=\frac{جـ^{٢}م^{٢}(م^{٢}+١)}{جـ^{٢}(م^{٢}+١)}=م^{٢}$ (١)

الطرف الأيسر = $\frac{أ}{جـ}=\frac{جـ م^{٢}}{جـ}=م^{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}}=\frac{أ}{جـ}$

حل آخر:

بفرض: $\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=م$ $\therefore \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}}=\frac{ب^{٢}}{جـ^{٢}}=م^{٢}$

من النسبتين الأولى والثانية $م^{٢}=\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}}$ = الطرف الأيمن

، $م^{٢}=\frac{أ}{ب}\times\frac{ب}{جـ}=\frac{أ}{جـ}$ = الطرف الأيسر

من (١)، (٢) $\therefore \frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}}=\frac{أ}{جـ}$

تدرب

إذا كانت أ، ب، جـ، د فى تناسب متسلسل؛ **اثبت أن:** $\frac{أ-٢ب}{ب-٢جـ}=\frac{٣ب+٤جـ}{٣جـ+٤د}$

ارشاد بفرض: $\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=\frac{جـ}{د}=م$

فيكون جـ = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣} أكمل

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تمارين (٢ - ٢)

١ إذا كانت: $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}}$ **فأثبت** أن كلاً من هذه النسب يساوى ٢ (ما لم تكن: س + ص = ٠)
ثم **أوجد** س : ص : ع

٢ إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣} = \frac{\text{جـ}}{٤} = \frac{٢\text{أ} - \text{ب} + ٥\text{جـ}}{٣\text{س}}$ **فأوجد** قيمة س.

٣ إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ + ب = ٢٧,٦ **فأوجد** قيمة كل من أ، ب، جـ

٤ إذا كان س، ص، ع، ل كميات متناسبة **فأثبت أن:**

أ $\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع} + \text{ل}}\right)^٢ = \frac{٢\text{س}^٢ - ٣\text{ص}^٢}{٢\text{ع}^٢ - ٣\text{ل}^٢}$

ب $\sqrt[٣]{\frac{٥\text{س}^٣ - ٣\text{ع}^٣}{٥\text{ص}^٣ - ٣\text{ل}^٣}} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{\text{ص} + \text{ل}}$

٥ إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ **فأثبت أن:**

أ $\frac{٢\text{ص} - \text{ع}}{٣\text{س} - ٢\text{ص} + \text{ع}} = \frac{١}{٢}$

ب $\sqrt{٣\text{س}^٢ + ٣\text{ص}^٢ + \text{ع}^٢} = ٢\text{س} + \text{ص}$

٦ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:**

أ $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}} = \left(\frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{د}}\right)^٢$

ب $\sqrt[٣]{\frac{٥\text{أ}^٣ - ٣\text{جـ}^٣}{٥\text{ب}^٣ - ٣\text{د}^٣}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$

٧ إذا كانت ب هى الوسط المتناسب بين أ، جـ **فأثبت أن:**

أ $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ}^{-١} + \text{ب}^{-١} + \text{جـ}^{-١}} = \text{ب}^٢$

ب $\frac{٢\text{جـ}^٢ - ٣\text{ب}^٢}{٢\text{ب}^٢ - ٣\text{أ}^٢} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}^٢}{\text{ب}^٢}$

٨ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل؛ **فأثبت أن:**

أ $\frac{\text{أب} - \text{جـ د}}{\text{ب}^٢ - \text{جـ}^٢} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$

ب $\frac{\text{أ}^٢ - ٣\text{جـ}^٢}{\text{ب}^٢ - ٣\text{د}^٢} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

جـ $\frac{\text{أ}}{\text{ب} + \text{د}} = \frac{\text{جـ}^٣}{\text{جـ}^٢\text{د} + \text{د}^٣}$

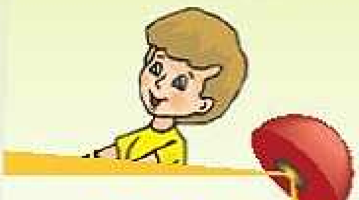
د $\frac{\text{جـ}^٢ - \text{د}^٢}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{أ}}$

٩ إذا كانت: ٥أ، ٦ب، ٧جـ ٨د كميات موجبة فى تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\sqrt[٣]{\frac{٥\text{أ}}{٨\text{د}}} = \sqrt{\frac{٥\text{أ} + ٦\text{ب}}{٧\text{جـ} + ٨\text{د}}}$

٢ - ٣

التغير الطردى و التغير العكسى



سوف تتعلم

- مفهوم التغير الطردى
- مفهوم التغير العكسى
- كيفية التمييز بين التغير الطردى والتغير العكسى.

المصطلحات الأساسية

- تغير
- تغير طردى
- تغير عكسى

أولا : التغير الطردى

فكر وناقش (١)

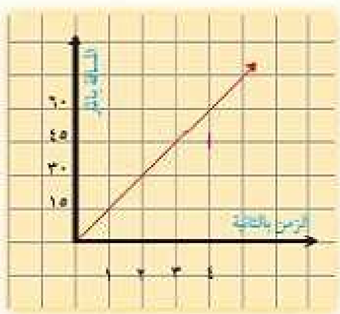
تتحرك سيارة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٥ م/ث فإذا كانت المسافة المقطوعة ف بالمتر فى زمن قدره ن ثانية تعطى بالعلاقة: ف = ع ن.

ن	١	٢	٣	٤
ف	١٥	٣٠	٤٥	٦٠

أ مثِّل العلاقة بين ف، ن بيانيًا.

ب هل التمثيل البيانى يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)؟

جـ أوجد $\frac{ف}{ن}$ فى كل حالة. ماذا تلاحظ ؟



نلاحظ مما سبق أن:

$\frac{ف}{ن}$ تساوى فى كل مرة مقدارًا ثابتًا وهو ١٥

أى: ف = ١٥ ن ويقال حينئذ إن ف تتغير طرديًا بتغير ن وتكتب رمزيًا ف ∝ ن.

تعريف:

يقال إن ص تتغير طرديًا مع س وتكتب ص ∝ س وتكتب ص = م س

(حيث م ثابت ≠ ٠) وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_١$، $س_٢$ وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$، $ص_٢$ على الترتيب فإن: $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

مما سبق نستنتج أن:

١ العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ويمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ إذا كانت ص $\propto$ س فإن ص = م س **وكذلك** إذا كانت ص = م س فإن ص $\propto$ س

مثال ١

إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ **فأوجد**

أولاً: العلاقة بين ص، س **ثانيًا:** قيمة ص عندما س = ٦٠

الحل

أولاً: ∵ ص $\propto$ س ∴ ص = م س (حيث م ثابت ≠ ٠)

وبالتعويض عن قيمتى س، ص فى العلاقة

∴ ١٤ = ٤٢ × م ∴ م = $\frac{١٤}{٤٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ العلاقة هى: ص = $\frac{١}{٣}$ س

ثانيًا: عندما س = ٦٠ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

ملاحظة: يمكن إيجاد العلاقة $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ لإيجاد قيمة ص فى المطلوب الثانى

ثانياً: التغير العكسى

إذا كانت مساحة المستطيل م وأحد بعديه س والبعد الآخر ص.

أ **اكتب** العلاقة بين كل من م، س، ص.

ب إذا كانت مساحة المستطيل ثابتة وتساوى ٣٠ سم^٢ **فأكمل** الجدول الآتى:

س	٣	٥	٦	١٠
ص	....	....	....	....

جـ **أوجد** س ص فى كل حالة. **ماذا تلاحظ؟**

مما سبق نلاحظ أن:

س ص = ٣٠ أى أن: ص = $\frac{٣٠}{س}$ أى أن ص تتغير عكسيًا بتغير س وتكتب رمزيًا ص $\propto \frac{١}{س}$

وبالمثل: س = $\frac{٣٠}{ص}$ أى أن: س تتغير عكسيًا بتغير ص وتكتب رمزيًا س $\propto \frac{١}{ص}$

تعريف:

يقال إن ص تتغير عكسيًا مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{س}$ إذا كانت س ص = م (حيث م ثابت $\neq$ ٠)

وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_1$ ، $س_2$ وتبعًا لذلك أخذ المتغير ص القيمتين $ص_1$ ، $ص_2$ على الترتيب فإن: $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مما سبق نستنتج أن:

(١) العلاقة السابقة ليست علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ولا يمثلها خط مستقيم.

(٢) إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س فإن: ص = $\frac{م}{س}$ (حيث م ثابت $\neq$ ٠)

وكذلك إذا كانت ص = $\frac{م}{س}$ فإن ص $\propto \frac{1}{س}$.

مثال ١

إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أولاً: **أوجد** العلاقة بين س، ص. **ثانيًا:** **أوجد** قيمة ص عندما س = ١,٥.

الحل

$\because$ ص $\propto \frac{1}{س}$ $\therefore$ ص = $\frac{م}{س}$ (حيث م ثابت $\neq$ ٠)

وبالتعويض عن قيمتى س، ص فى العلاقة

$\therefore$ ٣ = $\frac{م}{٢}$ $\therefore$ م = ٢ × ٣ = ٦

$\therefore$ العلاقة هى: ص = $\frac{٦}{س}$

عندما س = ١,٥ $\therefore$ ص = $\frac{٦}{١,٥}$ = ٤

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة ص من العلاقة $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تدرب

بين أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا، وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا، وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًا أو عكسيًا مع ذكر السبب فى كل حالة:

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٣	٦
٢-	٩-
١٨-	١
٩	٢-

مثال ٣

الربط بالفيزياء: إذا كانت العلاقة بين السرعة ع (متر / ث) و الزمن ن (ثانية) هى ع = ٩,٨ ن

أولاً: **حدد** نوع التغير بين ع، ن.

ثانيًا: أ **أوجد** قيم ع عندما ن = ٢ ثانية ، ن = ٤ ثوانٍ

ب **أوجد** قيمة ن عندما ع = ٢٤,٥ متر/ث

الحل

أولاً: ∵ ع = ثابت × ن أى ع ∝ ن أى ع تتغير طرديًا بتغير ن.

ثانيًا: أ عندما ن = ٢ تكون ع = ٩,٨ × ٢ = ١٩,٦ متر/ث

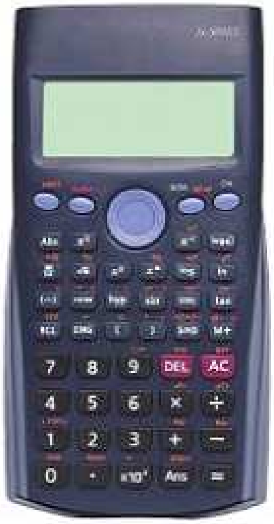
عندما ن = ٤ تكون ع = ٩,٨ × ٤ = ٣٩,٢ متر/ث

ب عندما ع = ٢٤,٥ تكون ٢٤,٥ = ٩,٨ × ن ∴ ن = $\frac{٢٤,٥}{٩,٨}$ = ٢,٥ ثانية.

مثال ٤

الربط بالهندسة: إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطرها (نق)، وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم؛ **فأوجد** (ع) عندما نق = ١٥,٧٥ سم.

الحل



$\because$ ع $\propto \frac{١}{نق^٢}$ $\quad\therefore$ ع = م $\times \frac{١}{نق^٢}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

ع = ٢٧ عند نق = ١٠,٥

$\because$ ٢٧ = م $\times \frac{١}{(١٠,٥)^٢}$ $\quad\therefore$ م = ٢٧ × $(١٠,٥)^٢$ (١)

وبالتعويض $\quad\therefore$ ع = ٢٧ × $(١٠,٥)^٢ \times \frac{١}{نق^٢}$ من (١)

وعندما نق = ١٥,٧٥ سم $\quad\therefore$ ع = ٢٧ × $(١٠,٥)^٢ \times \frac{١}{(١٥,٧٥)^٢}$ = ١٢ سم

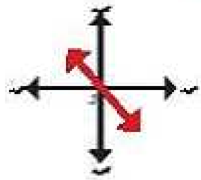
ويمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد الخطوة الأخيرة كما يلي:

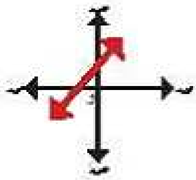
27 × 10.5 x^2 ÷ 10.75 x^2 =

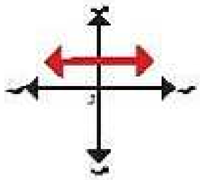
تمارين (٢ – ٣)

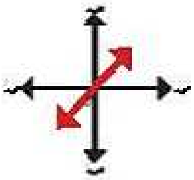
أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١ أي من الأشكال البيانية الآتية تمثل تغيرا طرديا بين س، ص:


أ


ب


جـ


د

٢ العلاقة التي تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص، س هي:

أ س ص = ٥ ب ص = س + ٣ جـ $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ د $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن ثابت التناسب يساوي:

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ ٢ د ٦

ثانيًا: (الحساب العقلي): من بيانات الجدول التالي أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

أ بين نوع التغير بين ص، س

ب أوجد ثابت التناسب

جـ أوجد قيمة ص عندما س = ٣

د أوجد قيمة س عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تمارين عامة على الوحدة

(١) إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديًا مع عدد المشتركين س؛ **فاختر** الإجابة الصحيحة:

(أ) ص = أ س   (ب) ص = أ + س

(جـ) ص = أ + $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ (م ثابت ≠ ٠)   (د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

(٢) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٤٠ عندما س = ١٤ **فأوجد** س عندما ص = ٨٠.

(٣) تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلو مترًا في ٦ ساعات؛ **فكم** كيلو مترًا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات؟

(٤) إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على الأرض (ر)، وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كيلو جرامًا على الأرض، ووزنه ١٤ كيلو جرامًا على القمر؛ **فماذا** يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جرامًا؟

(٥) إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ **فأوجد** قيمة ص عندما س = ١٦.

(٦) إذا كان ص $\propto$ س **فأثبت** أن ص^{٢} + س^{٢} $\propto$ ص^{٢} − س^{٢}.

(٧) إذا كانت أ، ب، جـ، د، في تناسب متسلسل **فأثبت أن:**

(أ) $\frac{\text{أ}^{٢} - ٣\text{جـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢} - ٣\text{د}^{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

(ب) $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{د}}{٣\text{أ} - ٤\text{د}} = \frac{٢\text{أ}^{٣} + ٣\text{ب}^{٣}}{٣\text{أ}^{٣} - ٤\text{ب}^{٣}}$

(٨) إذا كان $\frac{\text{س}}{٢\text{أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{٢\text{ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{ع}}{٢\text{جـ} - \text{أ}}$ **فأثبت أن** $\frac{٢\text{س} + \text{ص}}{٤\text{أ} + ٤\text{ب} - \text{جـ}} = \frac{٢\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع}}{٣\text{أ} + ٦\text{ب}}$.

(٩) **الربط بالهندسة:** س، ص، ع أطوال ثلاثة أضلاع متناسبة في مثلث وكان س + ص = ١٥ سم، ص + ع = ٢٢,٥ سم؛ **فأوجد** س : ص.

(١٠) **تطبيقات حياتية:** في مجال اهتمام الدولة بالريف المصري، رصدت الدولة مبلغ ١,٨٥ × ١٠^{٦} جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة، ووحدة صحية ومركز شباب، فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{٣}{٢}$ من تكاليف الوحدة الصحية، وتكاليف الوحدة الصحية $\frac{٥}{٦}$ من تكاليف مركز الشباب؛ **فما** هي تكاليف كل منها؟

(١١) **تطبيقات حياتية:** إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسيًا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في أربع ساعات، فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل؟

ملف الإنجاز

١ **حساب عقلي** من بيانات الجدول الآتى: **أجب** عن الأسئلة الآتية:

س	٣	٨	٦	١٢
ص	٨	٣	٤	٢

أ **بين** مع ذكر السبب أن التغير بين س، ص تغير عكسى.

ب **اكتب** ثابت التغير.

جـ **اكتب** العلاقة بين س ، ص.

د **أوجد** قيمة ص عندما س = ٤٨

هـ **أوجد** قيمة س عندما ص = ١٢

٢ إذا كانت نسبة النجاح فى إحدى المحافظات للشهادة الإعدادية هى ٨٣٪ وكانت نسبة النجاح للبنين ٧٩٪، ونسبة النجاح للبنات ٨٩٪ **فأوجد** نسبة النجاح بين عدد البنين إلى عدد البنات فى هذه المحافظة.

اختبار الوحدة

١ إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + جـ}{٦} = \frac{جـ + أ}{٥}$ **فأثبت أن:** $\frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$.

٢ إذا كان ص = أ − ٩ وكان ص $\propto \frac{١}{س^{٢}}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ **فأوجد** العلاقة بين ص، س ثم **استنتج** قيمة ص عندما س = ١.

٣ إذا كان $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ **فأثبت أن** ص $\propto$ ع.

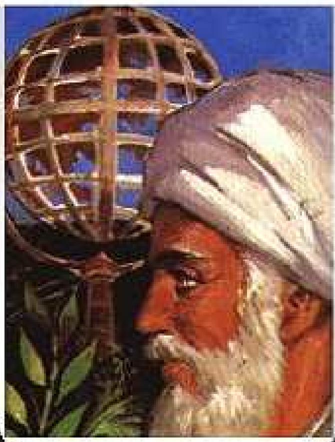
٤ إذا كان $س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠$ **فأثبت أن** ص $\propto \frac{١}{س^{٢}}$.

٥ **الربط بالفلك:** إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على القمر (ر)، فإذا كان $و_{١}$ = ١٨٢ كجم، $ر_{١}$ = ٣٥ كجم **فأوجد** $ر_{٢}$ عندما $و_{٢}$ = ٣١٢ كجم.

٦ **الربط بالفيزياء:** إذا كان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ ث عندما نق = ٣ سم. **أوجد** ع عندما نق = ٢,٥ سم.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الوحدة الثالثة: حساب المثلثات



علم حساب المثلثات هو أحد فروع الرياضيات والذى يتناول دراسة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، وكان قدماء المصريين هم أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات فى بناء الأهرامات وبناء معابدهم، وفى دراسة الفلك وفى حساب المسافات الجغرافية، كما قاس البابليون الزوايا بالدرجات والدقائق والثوانى، وقد قام البيرونى بعمل جداول لجيوب الزوايا ثم استنتج الطوسى أن جيوب الزوايا تتناسب مع الأضلاع المقابلة لها، ثم تعرف الغرب على ما صاغه علماء العرب والمسلمين من خلال ترجمة كتب الفلك العربية على يد العالم الألمانى يوهان مولر.

أبو الريحان البيرونى
عالم ولد فى خوارزم عام
٩٧٣ م وتوفى عام ١٠٤٨ م.

٣ - ١

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

سوف تتعلم

- ★ كيفية إيجاد النسب المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم الزاوية.

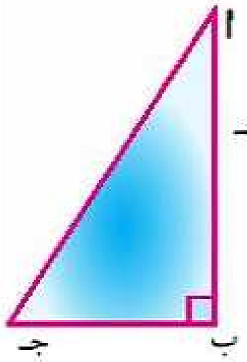
مصطلحات أساسية

- ★ قياس ستينى.
- ★ جيب زاوية.
- ★ جيب تمام زاوية .
- ★ ظل زاوية.

فكر وناقش

فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب،

أكمل باستخدام أحد الرموز (> أو < أو =)



١ إذا كان ق(∠جـ) > ق(∠أ) فإن أ ب ...... ب جـ

٢ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ١

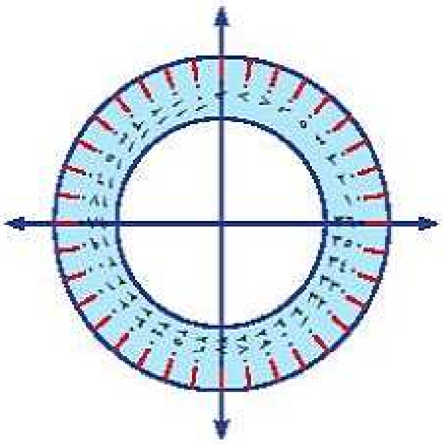
٣ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ ١

٤ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} \div \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ...... $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

٥ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} + \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ١

٦ $\frac{(\text{أ ب})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}} + \frac{(\text{ب جـ})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}}$ ١

القياس الستينى للزوايا



درسنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°، وإذا قسمت هذه الزوايا إلى أربعة أرباع متساوية فإن الربع الواحد يحتوى على ٩٠° (زاوية قائمة)؛ والدرجة هى وحدة القياس الستينى، كما توجد أجزاء من الدرجة على النحو التالى:

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

٣٥ درجة ، ٢٤ دقيقة ، ٤٢ ثانية تكتب

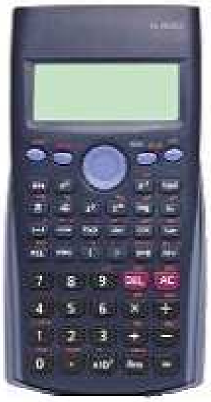
كالآتى: ٤٢ً ٢٤َ ٣٥° ويمكن تحويل الدقائق والثوانى إلى أجزاء من الدرجة بإحدى هاتين الطريقتين :

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

أولاً: نحول ٢٤َ إلى درجات ٢٤َ = $\frac{٢٤}{٦٠}$ = ٠,٤°، ونحول ٤٢ً أولاً إلى دقائق ثم إلى درجات: ٤٢ً = $\frac{٤٢}{٦٠}$ = ٠,٧َ ،

٠,٧َ = $\frac{٠,٧}{٦٠}$ = ٠,٠١١٦٦٦٧°

فيكون الناتج ٤٢ً ٢٤َ ٣٥° = ٣٥ + ٠,٤ + ٠,٠١١٦٦٦٧ = ٣٥,٤١١٦٦٦٧°



ثانياً: باستخدام الآلة الحاسبة على النحو التالى:

والناتج هو: ٣٥,٤١١٦٦٦٧°   ٣٥ [°’’’] ٢٤ [°’’’] ٤٢ [°’’’]

وبالمثل يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق وثوان.

فمثلاً: ٥٤,٣٦° يمكن تحويلها إلى درجات ودقائق وثوان باستخدام المفاتيح التالية:

فيكون الناتج : ٣٦ً ٢١َ ٥٤°   ٥٤,٣٦ [=] [SHIFT] [°’’’]

تدرب

(١) اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات:

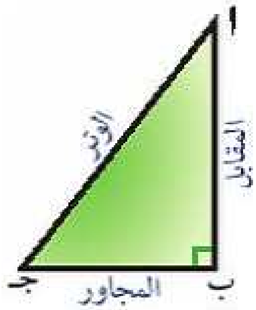
أ) ١٦َ ٧٦°　　ب) ٥٦ً ٣َ ٤٥°　　جـ) ٨ً ٣٨َ ٨٥°　　د) ٤٣ً ٢٦َ ٦٥°

(٢) اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثوانى.

أ) ٣٤,٦°　　ب) ٧٨,٠٨°　　جـ) ٥٦,١٨°　　د) ٨٣,٢٤٦°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة:

الشكل المقابل:



يمثل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ، جـ زاويتان حادتان متتامتان؛ فالضلع المقابل للزاوية جـ يسمى بالمقابل ، والضلع المجاور للزاوية جـ يسمى بالمجاور ، والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر.

وستعرف الآن على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة؛ وهى:

(١) **جيب الزاوية:** ويرمز له بالعربية جا، وبالإنجليزية [sin] .

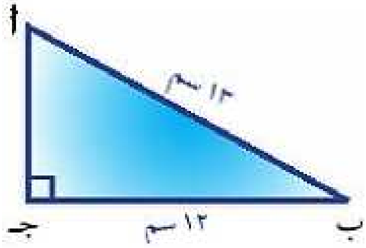
(٢) **جيب تمام الزاوية:** ويرمز له بالعربية جتا، وبالإنجليزية [cos] .

(٣) **ظل الزاوية:** ويرمز له بالعربية ظا، وبالإنجليزية [tan] .

جا حـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$
جتا حـ	=	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
ظا حـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

أمثلة

(١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، أ ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٢سم .



أ **أوجد** طول $\overline{\text{أ جـ}}$

ب **أوجد كلاً من:** جا أ ، جتا أ ، ظا أ ، جا ب ، جتا ب ، ظا ب

جـ **أثبت أن :** جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

د **أوجد :** ١ + ظا^{٢} أ

الحل

أ ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ ∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} - (ب جـ)^{٢}

∴ (أ جـ)^{٢} = (١٣)^{٢} - (١٢)^{٢} = (١٣ + ١٢) (١٣ - ١٢) = ٢٥

∴ أ جـ = ٥سم

ب جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظا أ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

جـ الطرف الأيمن = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٤٤ + ٢٥}{١٦٩} = ١$$

د ١ + ظا^{٢} أ = ١ + $(\frac{١٢}{٥})^{٢}$ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

تدرب

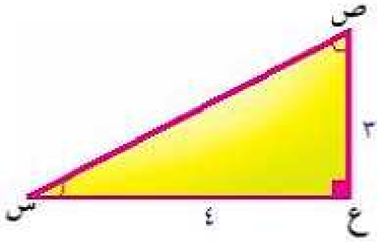
أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢سم ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{ب جـ}}$ = {ء}

أولاً: أوجد قيمة : جا (جـ أ ء) ، جتا (جـ أ ء) ، ظا (جـ أ ء)

ثانياً: أثبت أن: أ جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ = ١ ب جا ب + جتا جـ > ١

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تمارين (٣ ـ ١)



١ فى الشكل المقابل : أكمل

أ جا س = ... ب جتا س = ...

جـ ظا س = ... د جتا ص = ...

هـ ظا ص = ... و جا ص = ...

٢ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

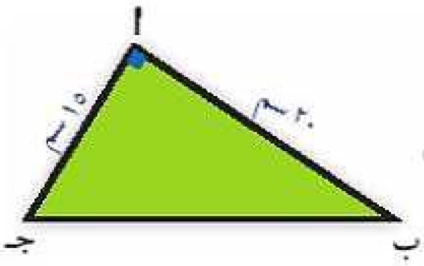
٣ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

٤ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ **فأوجد** القياس الستينى لكل زاوية من زواياه.

٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٥ سم؛ اكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : جا جـ ، جتا أ ، جتا جـ ، ظا جـ .

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ .



٧ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه ق ($\angle$ أ) = ٩٠° ، أ جـ = ١٥سم ، أ ب = ٢٠سم

أثبت أن : جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب = صفر

٨ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣سم

أوجد قيمة : أ ظا س + ظا ع ب جتا س جتا ع - جا س جا ع

جـ جا س جتا ع + جتا س جا ع

٩ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم ،

أوجد قيمة كل من : أ ظا س × ظا ص ب جا^{٢}س + جا^{٢}ص

١٠ أ ب جـ د شبه منحرف متساوى الساقين فيه أ د // ب جـ ، أ د = ٤سم ، أ ب = ٥سم، ب جـ = ١٢سم

أثبت أن : $\frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^{٢}\text{ جـ + جتا}^{٢}\text{ ب}} = ٣$

٣ - ٢

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد النسب المثلثية للزوايا.
- (٣٠°، ٤٥°، ٦٠°)

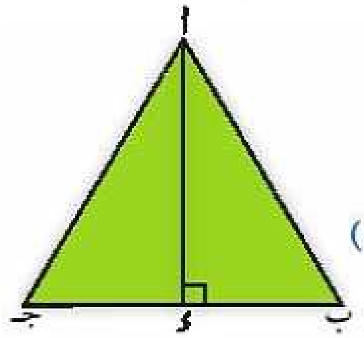
مصطلحات أساسية

- نسبة مثلثية.
- زاوية خاصة.

فكر وناقش

(١) فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$ جـ مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٢ل ، رسم $\overline{أ ى} \perp \overline{ب جـ}$



أكمل :

(١) ق($\angle$ ب) = ...°

(٢) ق($\angle$ ب أ ى) = ...°

(٣) ب ى = ... ، أ ى = ... (بدلالة ل)

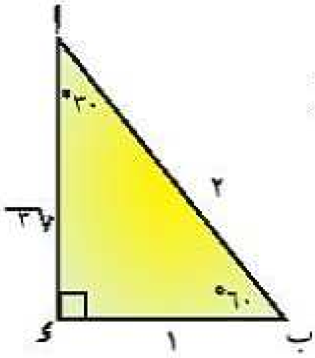
(٤) ب ى : أ ب : أ ى = ... : .... : ....

نلاحظ مما سبق :

أن Δ أ ب ى ثلاثينى ستينى، وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

ب ى : أ ب : أ ى = ١ : ٢ : $\sqrt{3}$ وبالتالى يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا

٣٠° ، ٦٠° على النحو التالى :



جا ٣٠° = $\frac{\text{ب ى}}{\text{أ ب}} = \frac{1}{2}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا ٣٠° = $\frac{\text{ب ى}}{\text{أ ى}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ،

جا ٦٠° = $\frac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

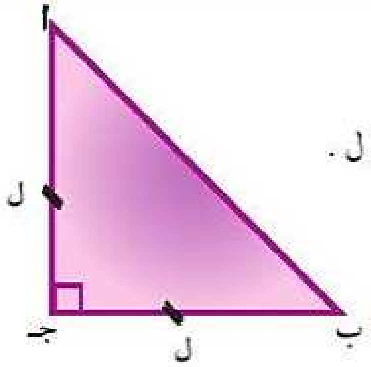
جتا ٦٠° = $\frac{\text{ب ى}}{\text{أ ب}} = \frac{1}{2}$ ، ظا ٦٠° = $\frac{\text{أ ى}}{\text{ب ى}} = \sqrt{3}$

تدرب

أكمل : جا ٣٠° = جتا ....° ظا ٣٠° = $\frac{1}{\text{....}}$ جتا ٣٠° = جا ....°

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

فكر وناقش



١ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين وقائم الزاوية فى جـ وطول كل من ساقيه ل .

أكمل :

١ ق(∠أ) = ... ، ق(∠ب) = ...

٢ ∵ (أب)^{٢} = (أجـ)^{٢} + ... ∴ (أب)^{٢} = ل^{٢} + ...

٣ أجـ : ب جـ : أب = ... : .... : ....

∴ (أب)^{٢} = ٢ل^{٢} ∴ أب = $\sqrt{٢}$ ل

نلاحظ مما سبق :

أن Δ أب جـ فيه ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥° وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

أجـ : ب جـ : أب = ١ : ١ : $\sqrt{٢}$ وبالتالى يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية ٤٥° **كالآتى :**

جا ٤٥° = $\frac{أجـ}{أب}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا ٤٥° = $\frac{ب جـ}{أب}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = $\frac{أجـ}{ب جـ}$ = ١

ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة فى جدول كالآتى :

النسبة \ ق الزاوية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

ملاحظات :

١ **مما سبق نجد أن:** (جيب) أى زاوية يساوى (جيب تمام) الزاوية المتممة لهذه الزاوية ، والعكس صحيح .

فمثلاً: جا ٣٠° = جتا ٦٠° ، جتا ٣٠° = جا ٦٠° ، جا ٤٥° = جتا ٤٥° .

٢ لأى زاوية أ يكون : ظا أ = $\frac{جا أ}{جتا أ}$

أمثلة

١ أوجد قيمة كل من :

أ جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

ب $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\,٦٠° + \text{جتا}^{٢}\,٣٠° + \text{ظا}^{٢}\,٤٥°}{\text{جا}\,٦٠°\ \text{ظا}\,٦٠° - \text{جا}\,٣٠°}$

الحل

أ المقدار = جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

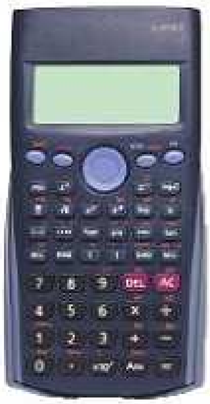
ب المقدار $= \dfrac{\text{جتا}^{٢}\,٦٠° + \text{جتا}^{٢}\,٣٠° + \text{ظا}^{٢}\,٤٥°}{\text{جا}\,٦٠°\ \text{ظا}\,٦٠° - \text{جا}\,٣٠°} = \dfrac{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + (١)^{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} - \left(\frac{١}{٢}\right)} = \dfrac{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ١}{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}} = \dfrac{١ + ١}{١} = ٢$

تدرب

برهن على صحة كل مما يأتى:

أ جا^{٢} ٣٠° = ٥ جتا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥°

ب ظا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) ÷ جتا^{٢} ٣٠°



أمثلة

٢ أوجد النسب المثلثية التالية :

جا ٤٣° ، جتا ٢٨َ ٥٣° ، ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤°

مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل

جا ٤٣° ≃ ٠,٦٨٢٠ ابدأ ← sin ٤٣ =

جتا ٢٨َ ٥٣° ≃ ٠,٥٩٥٣ ابدأ ← cos ٥٣ °' '' ٢٨ °' '' =

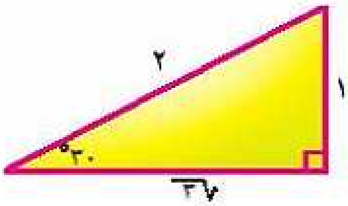
ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤° ≃ ٢,١٠٨٩ ابدأ ← tan ٦٤ °' '' ٣٧ °' '' ٤٩ °' '' =

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

إيجاد الزاوية إذا عُلمت النسبة المثلثية لها :

سبق أن درست أنه إذا علمت زاوية فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كانت الزاوية قياسها ٣٠° فإن جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ وكذلك إذا كانت الزاوية قياسها ٣٣° فإن جا ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥



sin ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥

والآن نريد معرفة الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كان جا س = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ والمطلوب معرفة قيمة س .

فإننا نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى:

ابدأ ← SHIFT sin ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ = °'" ٣٣°

أمثلة

٣ أوجد ق(∠هـ) فى كل مما يأتى :

جا هـ = ٠,٦ ، جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ، ظا هـ = ١,٠٨٢٣

الحل

∵ جا هـ = ٠,٦ ∴ ق(∠هـ) = ١٢ً ٥٢َ ٣٦° SHIFT sin ٠,٦ = °'"

∵ جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ∴ ق(∠هـ) = ٢٥ً ٣٣َ ٥١° SHIFT cos ٠,٦٢١٧ = °'"

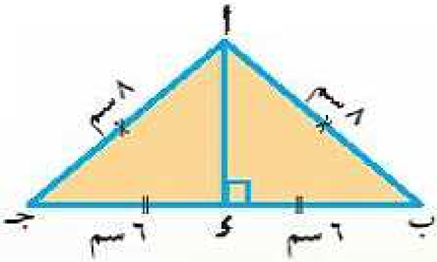
∵ ظا هـ = ١,٠٨٢٣ ∴ ق(∠هـ) = ٤٨ً ١٥َ ٤٧° SHIFT tan ١,٠٨٢٣ = °'"

٤ **الربط بالهندسة:** أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم.

أوجد :

أولاً: ق(∠ب)

ثانياً: مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين.



الحل

نرسم $\overleftrightarrow{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ المثلث أ ب جـ متساوى الساقين.

∵ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ويكون ب ء = جـ ء = ٦سم

∵ جتا ب = $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥

وباستخدام الآلة الحاسبة:

SHIFT cos 0.75 = °'''

∴ ق(∠ب) = ٣٥َ ٢٤َ ٤١° **(وهو المطلوب أولاً)**

لإيجاد مساحة سطح المثلث نوجد أء (من نظرية فيثاغورث)

∵ (أء)^٢ = (أب)^٢ - (ب ء)^٢

∴ (أء)^٢ = ٦٤ - ٣٦ = ٢٨ ∴ أء = $٢\sqrt{٧}$

∵ مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أء = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × $٢\sqrt{٧}$

= $١٢\sqrt{٧}$ سم^٢ ≃ ٣١,٧٥سم^٢ **(وهو المطلوب ثانياً)**

حل آخر للجزء الثانى:

∵ جا ب = $\frac{\text{أء}}{\text{أب}}$ ∴ جا ب = $\frac{\text{أء}}{٨}$

∴ أء = ٨ جا (٣٥َ ٢٤َ ٤١°) ①

مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أء وبالتعويض من ① فى هذه العلاقة

∴ مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ جا (٣٥َ ٢٤َ ٤١°) ≃ ٣١,٧٥سم^٢.

ويمكن استخدام حاسبة الجيب على النحو التالى:

ابدأ → 1 ÷ 2 × 12 × 8 × 41 sin 24 °''' 35 °''' =

تدرب

أكمل ما يأتى :

١ إذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٢ إذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٣ جا ٦٠° + جتا ٣٠° - ظا ٦٠° = ...

٤ إذا كانت ظا (س + ١٠) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٥ إذا كانت ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

تمارين (٣ - ٢)

١ أوجد قيمة

جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا^{٢} ٣٠°

٢ أثبت أن:

أ جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° - ١

ب ظا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥° = جا^{٢} ٦٠° + جتا^{٢} ٦٠° + ٢ جا ٣٠°

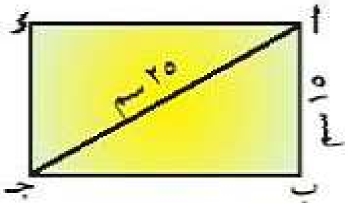
٣ أوجد قيمة س اذا كان:

٤س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥°

٤ أوجد هـ ، حيث هـ زاوية حادة.

جا هـ = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠°

٥ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:

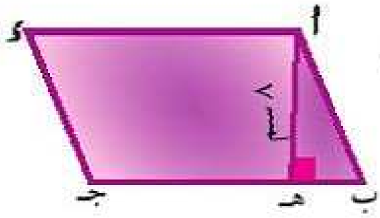


أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم .

أوجد : أولاً: ق(∠ أ جـ ب)

ثانياً: مساحة سطح المستطيل أ ب جـ ء .

٦ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:



أ ب جـ ء متوازى أضلاع مساحة سطحه ٩٦سم^{٢} ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

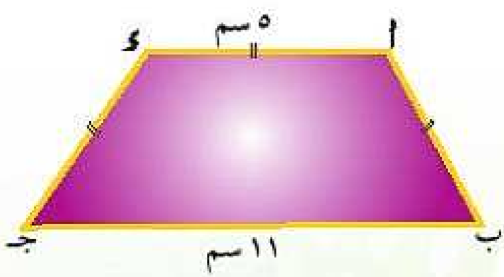
$\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ هـ = ٨سم

أوجد : أولاً: طول $\overline{\text{أ ء}}$ ثانياً: ق(∠ ب)

ثالثاً: طول $\overline{\text{أ ب}}$ لأقرب رقم عشرى واحد

(استخدم أكثر من طريقة)

٧ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:



أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه:

أ ب = أ ء = ء جـ = ٥ سم ، ب جـ = ١١سم.

أوجد : أولاً: ق(∠ ب) ، ق(∠ أ)

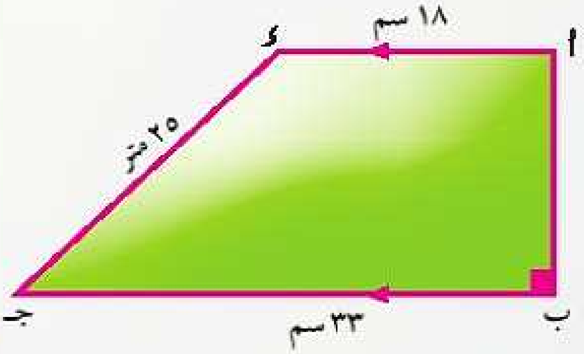
ثانياً: مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء .

ملف الإنجاز

قطعة أرض على شكل شبه منحرف أ ب جـ ء فيها أء // ب جـ ، ق(∠ب) = ٩٠° ،

أء = ١٨ مترًا ، ب جـ = ٣٣ متر

ء جـ = ٢٥ متر



المطلوب : أ إيجاد طول أب .

ب ق(∠جـ).

جـ إذا أراد صاحب قطعة الأرض عمل نافورة دائرية الشكل داخلها ، فما أكبر مساحة ممكنة لهذه النافورة ؟ ثم أوجد مساحة الجزء المتبقى من قطعة الأرض.

(π = ٣,١٤)

اختبار الوحدة

١ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

أ جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

ب ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠}^\circ}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ ٣٠}^\circ}$

٢ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التى تحقق كلاً من :

أ ظا س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠°

ب ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

٣ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٢,٦سم ، ق(∠جـ) = ٢٤َ ٨٤° .
أوجد لأقرب رقم عشرى واحد طول ب جـ .

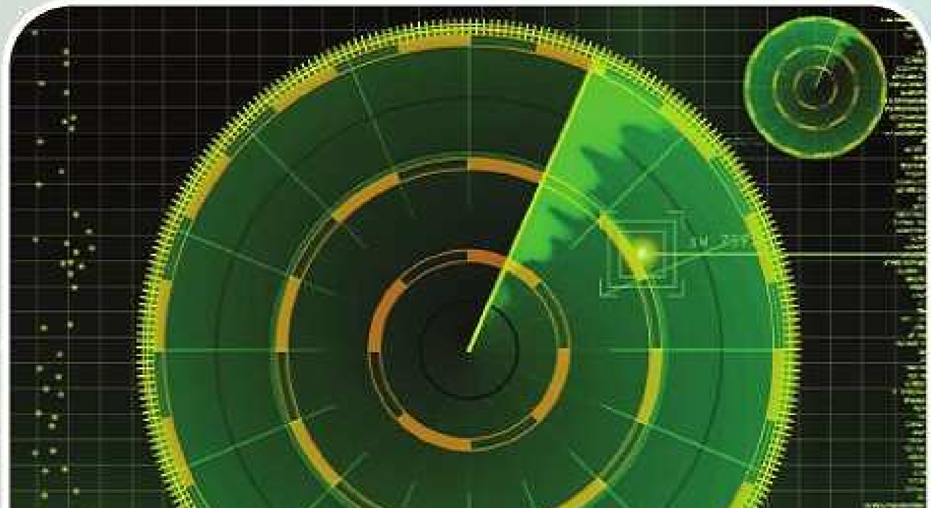
٤ أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أء // ب جـ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، فإذا كان أ ب = ٣سم ، أء = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم .
أثبت أن : جتا (ء جـ ب) - ظا (أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

٥ سُلَّم أب طوله ٦أمتار يستند طرفه العلوى أ على حائط رأسى وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت جـ هى مسقط نقطة أ على سطح الأرض ، وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول أجـ .

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الوحدة الرابعة: **الهندسة التحليلية**

الهندسة التحليلية



يستخدم الرادار فى التعرف على بعد وارتفاع واتجاه و سرعة الأجسام المتحركه كالطائرات والسفن.

وهوائى الرادار يستقبل الموجات المرتدة، و على شاشة الرادار يمكن تحديد إحداثيات موقع الهدف (الطائرة - السفن- ...)

١ - ٤

البعد بين نقطتين

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد البعد بين نقطتين باستخدام قانون البعد.

مصطلحات أساسية

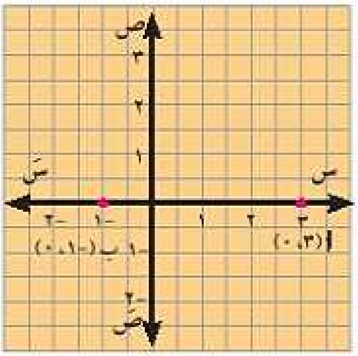
- مستوى إحداثي.
- زوج مرتب.
- بعد بين نقطتين.

فكر وناقش

سبق أن قمت بتمثيل الزوج المرتب على المستوى الإحداثى .
والآن هل يمكنك إيجاد البعد بين أزواج النقاط الآتية :

١ أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠)
٢ جـ (٠، -٣)، د (٠، -١)
٣ م (٣، ٢)، ن (٧، ٥)

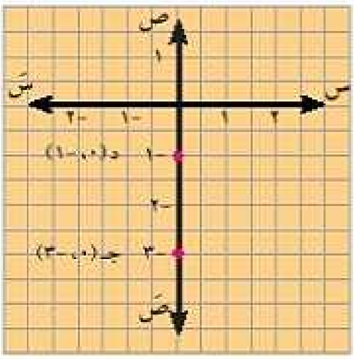
نلاحظ مما سبق أن :



١ النقطتان أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠) تقعان على محور السينات، وبالتالى فإن :

أ ب = |-١ -٣ | = | -٤|

فيكون أ ب = ٤ وحدة طول.

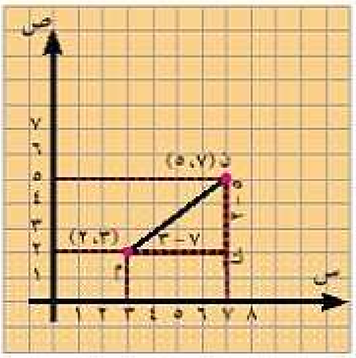


٢ النقطتان جـ (٠، -٣)، د (٠، -١) تقعان على محور الصادات، وبالتالى فإن :

جـ د = |-٣ - (-١)|

= |-٣ +١| = | -٢|

فيكون جـ د = ٢ وحدة طول .



٣ النقطتان م (٣، ٢)، ن (٧، ٥) يمكن تمثيلهما بيانيًا كما فى الشكل المقابل.

ولإيجاد طول م ن نوجد :

م ك = |٧ -٣ | = ٤ وحدة طول،

ن ك = |٥ -٢ | = ٣ وحدة طول .

△ م ك ن قائم الزاوية فى ك

∴ (ل م)^{٢} = (م ك)^{٢} + (ك ن)^{٢}

(نظرية فيثاغورث)

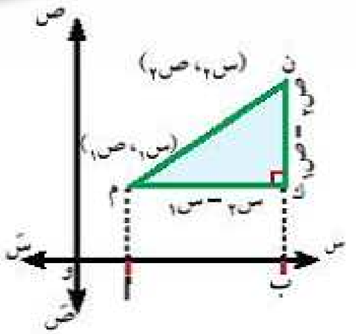
(ل م)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} (ل م)^{٢} = ٩ + ١٦

(ل م)^{٢} = ٢٥ ∴ (ل م) = ٥ وحدة طول

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

وبوجه عام :

إذا كانت : م $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$، ن $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ نقطتين فى المستوى الإحداثى



فإن : ك م = |و ب - و أ|

$= |\text{س}_2 - \text{س}_1|$

ك ن = |ن ب - ك ب| = $|\text{ص}_2 - \text{ص}_1|$

∵ △ ن ك م قائم الزاوية فى ك (نظرية فيثاغورث)

∴ $(\text{م ن})^2 = (\text{ك م})^2 + (\text{ك ن})^2$

$= (\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2$

∴ $\text{م ن} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

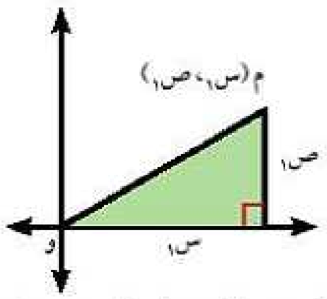
البعد بين النقطتين $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$، $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ = $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

ملاحظة :

فى الشكل المقابل بعد النقطة م $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ عن نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

و م = $\sqrt{\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2}$



تدرب

إذا كانت أ، ب، جـ، د أربع نقط معلومة فى مستوى إحداثى متعامد ؛ فحدد الشروط التى تجعل هذه النقط رؤوسًا لكل من الأشكال الهندسية الآتية :

(١) متوازى أضلاع (٢) مستطيل (٣) معين (٤) مربع

أمثلة

(١) أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢ ، ٤)، ب (-٣ ، ٠)، جـ (-٧ ، ٥) د (-٢ ، ٩) اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع.

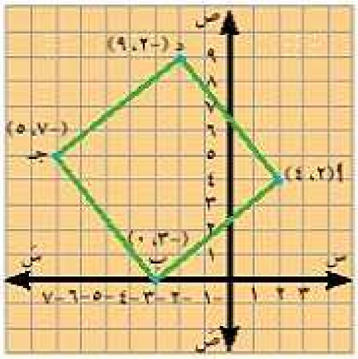
الحل

$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2} = \sqrt{[-3-2]^2 + [0-4]^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{[-7-(-3)]^2 + [5-0]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41}$

$\text{جـ د} = \sqrt{[-2-(-7)]^2 + [9-5]^2} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$

د أ = $\sqrt{[٢ - (-٢)]^٢ + [٤ - ٩]^٢}$ = $\sqrt{(٤)^٢ + (-٥)^٢}$ = $\sqrt{٤١}$



∵ أب = ب جـ = جـ د = د أ = $\sqrt{٤١}$

∴ الشكل أ ب جـ د إما أن يكون مربعًا أو معينًا

لإثبات أن الشكل أ ب جـ د مربع نوجد طولى القطرين $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{ب د}}$

أ جـ = $\sqrt{[-٧ - ٢]^٢ + [٥ - ٤]^٢}$ = $\sqrt{(-٩)^٢ + ١}$ = $\sqrt{٨٢}$

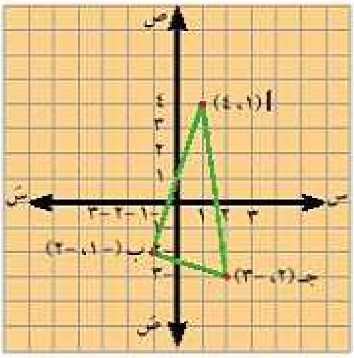
ب د = $\sqrt{[-٢ - (-٣)]^٢ + [٩ - ٠]^٢}$ = $\sqrt{(١)^٢ + (٩)^٢}$ = $\sqrt{٨٢}$

∵ أ جـ = ب د = $\sqrt{٨٢}$ وأضلاع الشكل أ ب جـ د متساوية فى الطول

∴ الشكل أ ب جـ د مربع.

٢ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢)، جـ (٢، -٣) قائم الزاوية، وأوجد مساحة سطحه

الحل



(أب)^٢ = $(-١ - ١)^٢ + (-٢ - ٤)^٢$ = ٤ + ٣٦ = ٤٠

(ب جـ)^٢ = $[٢ - (-١)]^٢ + [-٣ - (-٢)]^٢$ = ٩ + ١ = ١٠

(أ جـ)^٢ = $(٢ - ١)^٢ + (-٣ - ٤)^٢$ = ١ + ٤٩ = ٥٠

(أب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٤٠ + ١٠ = ٥٠ ، (أ جـ)^٢ = ٥٠

∵ (أ جـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢

∴ ق ($\angle$ ب) = ٩٠° (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ م ($\triangle$ أب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أب × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٤٠}$ × $\sqrt{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢$\sqrt{١٠}$ × $\sqrt{١٠}$ = ١٠ وحدة مربعة

٣ أثبت أن النقط أ (٣، -١)، ب (-٤، ٦)، جـ (٢، -٢)، تقع على دائرة مركزها النقطة م (-١، ٢)، ثم أوجد محيط الدائرة .

الحل

أ م = $\sqrt{(-١ - ٣)^٢ + [٢ - (-١)]^٢}$ = $\sqrt{(-٤)^٢ + (٣)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

ب م = $\sqrt{[-١ - (-٤)]^٢ + [٢ - ٦]^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

جـ م = $\sqrt{(-١ - ٢)^٢ + [٢ - (-٢)]^٢}$ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

∵ أ م = ب م = جـ م = ٥

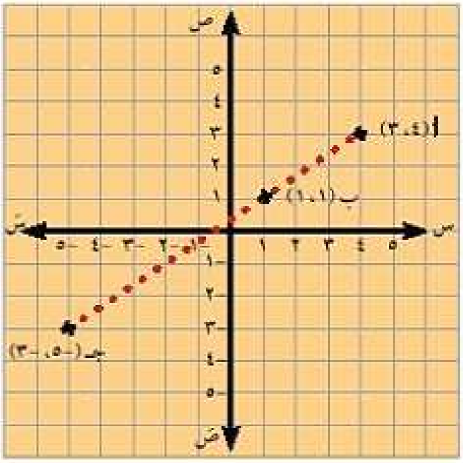
مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

∴ أ ، ب، جـ تقع على دائرة مركزها م

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول

تدرب

أثبت أن النقط أ (٤، ٣)، ب(١، ١)، جـ (-٥، -٣) تقع على استقامة واحدة



أكمل :

أ ب = $\sqrt{(١-٤)^{٢} + (١-٣)^{٢}}$ = ...

ب جـ = $\sqrt{(-٥-١)^{٢} + (-٣-١)^{٢}}$ = ...

أ جـ = $\sqrt{(-٥-٤)^{٢} + (-٣-٣)^{٢}}$ = ...

∴ أ ب + ب جـ = ... + ... = ...

∵ أ ب + ... = أ جـ

∴ النقط أ، ب، جـ على استقامة واحدة

تمارين (٤ ــ ١)

أولاً: أكمــل ما يأتى:

١ البعد بين النقطة (-٣، ٤) ونقطة الأصل يساوى ....

٢ البعد بين النقطتين (-٥، ٠)، (٠، ١٢) يساوى ....

٣ البعد بين النقطتين (١٥، ٠)، (٦، ٠) يساوى ....

٤ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧، ٤) وتمر بالنقطة (٣، ١) يساوى ....

٥ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠)، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة؛ فإن أ = ...

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

١ النقط (٠، ٠)، (٦، ٠)، (٠، ٨) :

أ تكون مثلث منفرج الزاوية   ب تكون مثلث حاد الزوايا

جـ تكون مثلث قائم الزاوية   د تقع على استقامة واحدة

٢ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة ، فأى من النقط الآتية تنتمى للدائرة ؟

أ (١، ٢)   ب (-٢، ١)   جـ ($\sqrt{٣}$، ١)   د ($\sqrt{٣}$، ١)

٣ بيّنْ أيًا من مجموعات النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

أ (١، ٤)، (٣، - ٢)، (- ٣، ١٦)   ب (٧، ٠)، (- ٣، - ٣)، (٢٢، ٩)

جـ (- ١، - ٤)، (١، ٠)، (٠، - ٢)   د (- ١، - ٤)، (١، ٠)، (٠، - ٢)

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

١ أوجد قيمة أ في كل من الحالات الآتية :

أ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (-٢، ٣) يساوى ٥

ب إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (٣ أ -١، -٥) يساوى ١٣

٢ إذا كانت أ (س، ٣)، ب (٣، ٢)، جـ (٥، ١) وكانت أ ب = ب جـ؛ فأوجد قيمة س.

٣ إذا كان بعد النقطة (س، ٥) عن النقطة (٦، ١) يساوى $٢\sqrt{٥}$ ؛ فأوجد قيمة س .

٤ بيّنْ نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة إلى زواياه :

أ أ (٣، ١٠)، ب (٨، ٥)، جـ (٥، ٢)   ب أ (١، -١)، ب (٢، ١)، جـ (-٣، -٢)

جـ أ (٣، ٣)، ب (٤، -١)، جـ (١، ١)

٥ بيّنْ نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ (- ٢، ٤)، ب (٣، - ١)، جـ (٤، ٥) بالنسبة لأضلاعه .

٦ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٥، -٥)، ب (- ١، ٧)، جـ (١٥، ١٥) قائم الزاوية فى ب، ثم أوجد مساحته .

٧ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٥، ٣)، ب (٦، -٢)، جـ (١، -١)، د (٠، ٤) اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين، ثم أوجد مساحته .

٨ أثبت أن النقط أ (-٢، ٥)، ب (٣، ٣)، جـ (-٤، ٢) ليست على استقامة واحدة، وإذا كانت د (-٩، ٤) فأثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع .

٩ فى الشكل المقابل :

أ أوجد إحداثيات النقط التى تمثل مواقع منزل أحمد ومنزل سعيد وموقف السيارات والمدرسة .

ب بعد منزل أحمد عن المدرسة .

جـ بعد منزل سعيد عن المدرسة.

د أيهما أقرب: منزل أحمد عن المدرسة أم منزل سعيد عن المدرسة ؟

هـ هل الطريقان $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$ متعامدان ؟ اذكر السبب.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٤ - ٢

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

سوف نتعلم

- كيفية إيجاد إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة.

مصطلحات أساسية

- طرفا قطعة مستقيمة.
- إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة .

فكر وناقش

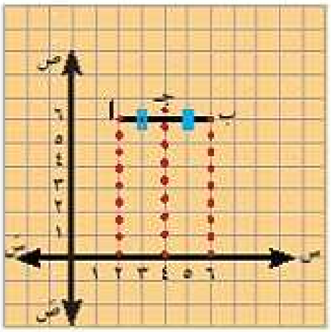
فى مستوى إحداثى متعامد: أوجد إحداثيي النقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة أ‾ب إذا كان:

أولاً : أ (٢،٦)، ب (٦،٦)

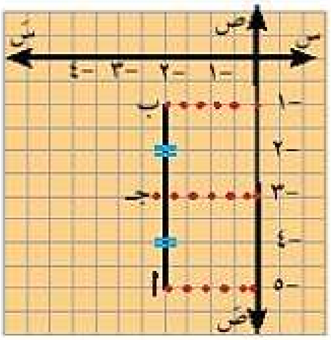
ثانيًا : أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١)

ثالثًا : أ (١، ٢)، ب (٥،٦)

أولاً : القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ(٢، ٦)، ب (٦، ٦) تـوازى محور السينات ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هى جـ (٤، ٦).



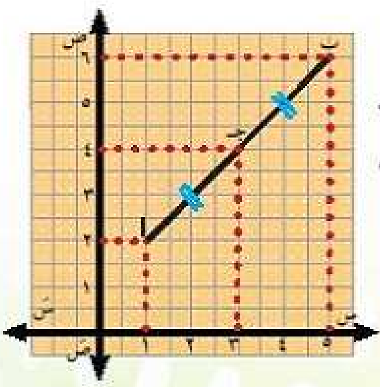
ثانيًا : القطعة المستقيمة التى طرفها النقطتان أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١) تـوازى محور الصادات، ويكون إحداثيى نقطة منتصفها هى جـ (-٢، -٣).



ثالثاً : فى الشكل المقابل :

نفرض أن نقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ (١، ٢)، ب (٥،٦)، ومن الرسم نجد أن إحداثيي جـ هو (٣، ٤).

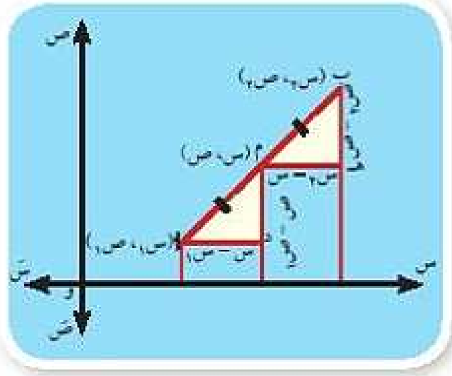
أى أن جـ $\left(\frac{١+٥}{٢} ، \frac{٢+٦}{٢}\right)$ أى جـ (٣، ٤)



وعلى وجه العموم يمكن استنتاج قانون إحداثيى منتصف قطعة مستقيمة كالآتى :

إذا كانت : أ $(س_١ ، ص_١)$، ب $(س_٢ ، ص_٢)$، م (س، ص) حيث

م منتصف $\overline{أب}$.



ومن تطابق المثلثين $\triangle$ م د أ ، $\triangle$ ب هـ م

نجد أن : أ د = م هـ

$\therefore$ س $-$ $س_١$ = $س_٢$ $-$ س

$\therefore$ ٢س = $س_١$ + $س_٢$ $\qquad$ $\therefore$ س = $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$

وبالمثل : م د = ب هـ $\qquad$ $\therefore$ ص $-$ $ص_١$ = $ص_٢$ $-$ ص

$\therefore$ ٢ص = $ص_١$ + $ص_٢$ $\qquad$ $\therefore$ ص = $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

مثال : إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ وكان أ (٣، - ٧) ، ب (- ٥، - ٣)

فإن إحداثيى منتصف $\overline{أب}$ هى $\left(\frac{٣ - ٥}{٢} ، \frac{- ٧ - ٣}{٢}\right)$ أى (- ١، - ٥)

تدرب

أوجد إحداثيى نقطة جـ منتصف $\overline{أب}$ فى الحالات الآتية :

١ أ (٢، ٤)، ب (٦، ٠) $\qquad$ ٢ أ (٧، -٥)، ب (-٣، ٥)

٣ أ (-٣، ٦)، ب (٣، -٦) $\qquad$ ٤ أ (٧، -٦)، ب (-١، ٠)

أمثلة

١ إذا كانت جـ (٦، -٤) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٥، -٣) فأوجد إحداثيى نقطة ب .

الحل

نفرض أن ب $(س_٢ ، ص_٢)$، أ (٥، -٣)، منتصف $\overline{أب}$ هي النقطة جـ (٦، -٤)

$\therefore$ س = $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، ص = $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

$\therefore$ ٦ = $\frac{٥ + س_٢}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ ٥ + $س_٢$ = ١٢ $\qquad$ $\therefore$ $س_٢$ = ١٢ -٥ = ٧

-٤ = $\frac{-٣ + ص_٢}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ -٣ + $ص_٢$ = -٨ $\qquad$ $\therefore$ $ص_٢$ = ٣

$ص_٢$ = -٨ + ٣ $\qquad$ $ص_٢$ = -٥

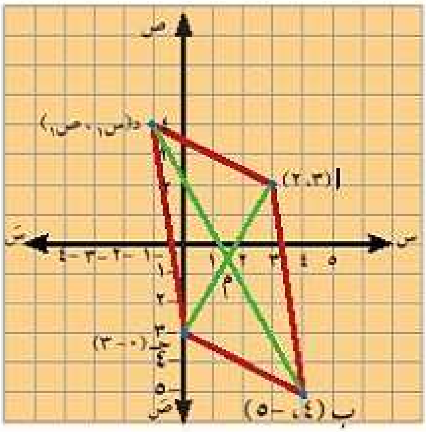
$\therefore$ ب (٧، -٥)

٢ أب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٢)، ب (٤، -٥)، جـ (٠، -٣) - أوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه، ثم أوجد إحداثيى نقطة د .

الحل

الشكل أب جـ د متوازى أضلاع، م نقطة تقاطع قطريه،

نفرض د (س$_1$ ، ص$_1$)



∵ م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ م $\left(\frac{٣ + ٠}{٢} ، \frac{٢ - ٣}{٢}\right)$

∴ م $\left(\frac{٣}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$

، م منتصف $\overline{\text{ب د}}$ ∴ م $\left(\frac{٤ + \text{س}_1}{٢} ، \frac{-٥ + \text{ص}_1}{٢}\right)$

∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٤ + \text{س}_1}{٢}$ ∴ ٣ = ٤ + س$_1$

∴ س$_1$ = -١

، $-\frac{١}{٢} = \frac{-٥ + \text{ص}_1}{٢}$ ∴ -١ = -٥ + ص$_1$

∴ ص$_1$ = ٤

∴ إحداثى م (-١ ، ٤)

تمارين (٤ ــ ٢)

أولا : **أكمــل**

أ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (٥، -٢) فإن إحداثيى النقطة ب هى ....

ب إذا كان أ ب = ب جـ = جـ د، أ (١، ٣)، جـ (٥، ١) أوجد :

أولاً : إحداثيى النقطة ب هى (......... ، ....)

ثانيًا : إحداثيى النقطة د هى (......... ، ....)

جـ $\overline{\text{أد}}$ متوسط فى △ أب جـ، م منتصف $\overline{\text{أد}}$

حيث أ (٠، ٨)، ب (٣، ٢)، جـ (-٣، ٦) أوجد :

أولاً : إحداثيى نقطة د هى (......... ، ....)

ثانيًا : إحداثيى نقطة م هى (......... ، ....)

تحقق بتعين إحداثيات النقط.

ثانيًا : (١) إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد س، ص فى كل من الحالات الآتية :

أ : أ (١، ٥) ، ب (٣، ٧) ، جـ (س، ص)

ب : أ (- ٣، ص) ، ب (٩، ١١) ، جـ (س، - ٣)

جـ : أ (س، - ٦) ، ب (٩، - ١١) ، جـ (- ٣، ص)

د : أ (س، ٣) ، ب (٦، ص) ، جـ (٤، ٦)

(٢) إذا كانت أ (١، - ٦)، ب (٩، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{أب}$ إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول .

(٣) أثبت أن النقط أ (٦، ٠)، ب (٢، -٤)، جـ (-٤، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب، ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلاً .

(٤) إذا كانت النقط أ(٣، ٢)، ب (٤، -٣)، جـ (-١، -٢)، د (-٢، ٣) هى رؤوس معين ؛ فأوجد :

أ إحداثيى نقطة تقاطع القطرين .

ب مساحة المعين أ ب جـ د.

(٥) أثبت أن النقط أ (-٣، ٠)، ب (٣، ٤)، جـ(١، -٦) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على $\overline{ب جـ}$.

(٦) إذا كانت أ (-١، -١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠)، د (٣، -٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى متعامد . أثبت أن $\overline{أجـ}$، $\overline{ب د}$ ينصف كل منها الآخر ، ثم عين نوع الشكل.

(٧) أثبت أن النقط أ (٥، ٣)، ب (٣، -٢)، جـ (-٢، -٤) هى رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب، ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب جـ د معينًا وأوجد مساحة سطحه .

(٨) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٤)، ب (٢، -١)، جـ (-٤، -٣) ؛ أوجد إحداثيى د .

خذ هـ ∈ $\overleftarrow{أد}$ حيث أهـ = ٢ أد . ما إحداثيًا النقطة هـ ؟

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٤ - ٣

ميل الخط المستقيم

سبق أن علمت أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$، $ص_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$) يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث $س_٢ \neq س_١$

سوف تتعلم

- العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين.
- العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين.

مصطلحات أساسية

- قياس موجب للزاوية.
- قياس سالب للزاوية.
- ميل خط مستقيم.
- مستقيمان متوازيان.
- مستقيمان متعامدان.

فكر وناقش

أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من الأزواج المرتبة التالية :

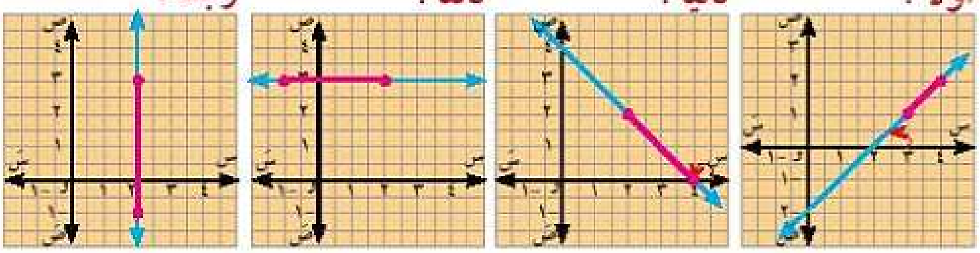
أولاً : (٣، ١)، (٤، ٢)   **ثانيًا** : (٤، ٠)، (٢، ٢)

ثالثًا : (-١، ٣)، (٢، ٣)   **رابعًا** : (٢، -١)، (٢، ٣)

ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن رسم المستقيمات المارة بأزواج النقط السابقة فى المستوى الإحداثى المتعامد كما فى الأشكال الآتية :

أولاً :   ثانيًا :   ثالثًا :   رابعًا :



القياس الموجب والقياس السالب للزاوية:

تكون الزاوية موجبة إذا كانت مأخوذة فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت مأخوذة فى نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

فمن الأشكال السابقة نستنتج أن:

رقم الشكل	الميل $\left(\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}\right)$، $س_٢ \neq س_١$	نوع الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	ميل الخط المستقيم
أولاً	$م = \frac{٢ - ١}{٤ - ٣} = ١$	حادة	أكبر من الصفر
ثانيًا	$م = \frac{٢ - ٠}{٢ - ٤} = -١$	منفرجة	أقل من الصفر
ثالثًا	$م = \frac{٣ - ٣}{٢ + ١} =$ صفر	صفرية	يساوى صفرًا
رابعًا	$م = \frac{٣ + ١}{٢ - ٢}$ (غير معرف)	قائمة	غير معرف

ونصل إلى تعريف ميل الخط المستقيم

هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؛

أى أن: ميل الخط المستقيم = ظا هـ

حيث هـ الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٥٦° ١٢َ ٤٨ً مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = ١,٤٨٦٥ .

الحل

١ ∵ م = ظا هـ ∴ م = ظا ٥٦° ١٢َ ٤٨ً = ١,٤٩٤٥٣٤٤٠٥

ابدأ ← tan 56 °'" 12 °'" 48 °'" =

٢ ∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١,٤٨٦٥ ∴ ق(∠ هـ) = ٥٦° ٤َ ١٣ً

ابدأ ← SHIFT tan 1.4865 = °'"

تدرب

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

أ ٣٠° ب ٤٥° جـ ٦٠°

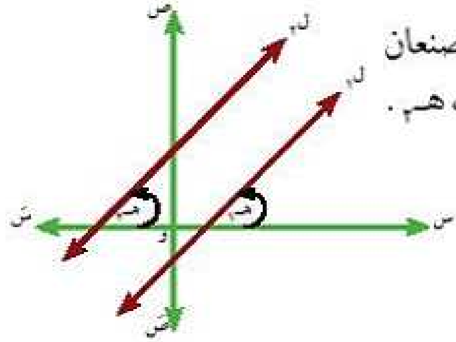
٢ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى الحالات الآتية :

أ م = ٠,٣٦٧٣ ب م = ١,٠٢٤٦ جـ م = ٣,١٦٤٨

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

فكر وناقش



الشكل المقابل : يمثل مستقيمين متوازيين ل١، ل٢ ميلاهما م١، م٢، يصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما هـ١، هـ٢.

أكمل ما يأتى :

١ ق (∠ هـ١) = ق (∠ هـ٢) لأنهما ....

٢ ظا هـ١ .... ظاهـ٢

٣ م١ .... م٢

نستنتج مما سبق أن :

إذا كان ل١ // ل٢ **فإن** م١ = م٢

أى أنه: إذا توازى مستقيمان فإن ميلاهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

فإذا كان م١ = م٢ فإن ل١ // ل٢

أى أن: إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

أمثلة

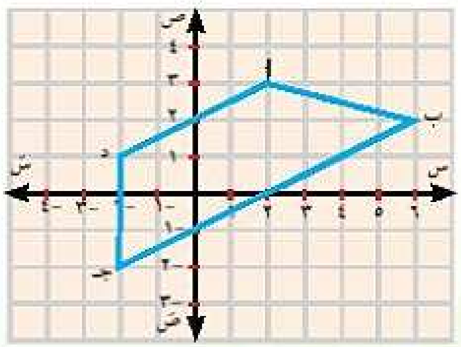
١ أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (-٣، -٢)، (٤، ٥) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°.

الحل

ميل المستقيم الأول (م١) = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{5 - (-2)}{4 - (-3)} = \frac{7}{7} = 1$

ميل المستقيم الثانى (م٢) = ظا ٤٥° = ١ ∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان.

٢ مثّل بيانيًا النقط أ(٢، ٣)، ب (٦، ٢) جـ (-٢، -٢)، د (-٢، ١)، على المستوى الإحداثى، ثم أثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف.



الحل

من الرسم نجد أن : $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

ولإثبات ذلك تحليليًا نوجد ميل كل من $\overline{\text{أد}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

ميل $\overline{أ د}$ (وليكن $م_1$)

∵ $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ∴ $م_1 = \frac{٣ - ١}{٢ + ٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

وميل $\overline{ب جـ}$ (وليكن $م_2$)

$م_2 = \frac{٢ + ٢}{٦ + ٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ∵ $م_1 = م_2$ ..... ∴ $\overline{أ د} // \overline{ب جـ}$

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف ما لم تكن النقط أ، ب، جـ، د على استقامة واحدة .... (١)

∵ ميل $\overline{أ ب} = \frac{٣ - ٢}{٢ - ٦} = \frac{١}{-٤}$، ميل $\overline{جـ د} = \frac{٢ + ١}{-٢ + ٢}$ ....(غير معرف)

∴ المستقيمان غير متوازيين........... (٢)

من (١)، (٢) ∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .

تدرب

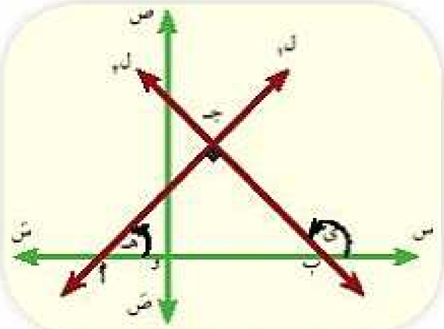
١) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (٠، ٠) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (- ١، ٤)، (١، ٧).

٢) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١)، (٦، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٣) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ // محور الصادات، حيث أ (س، ٧)، ب (٣، ٥) فأوجد قيمة س .

٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ // محور السينات، حيث جـ (٤، ٢)، د (- ٥، ص) فأوجد قيمة ص.

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

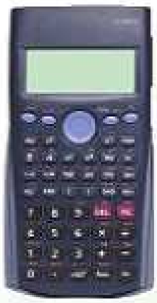


فكر وناقش

الشكل المقابل : يمثل المستقيمين $ل_1$، $ل_2$ الذى ميلاهما $م_1$، $م_2$ حيث $ل_1 \perp ل_2$.

أوجد العلاقة بين ق (∠ هـ)، ق (∠ ى)

ثم أكمل الجدول الآتى باستخدام حاسبة الجيب:



قيم هـ	٢٠°	٤٠°	......	......	......
قيم ى	......	......	١٤٠°	١٥٠°	......
ظا $هـ_1$ × ظا $هـ_2$	......	......	......	......	......

من الجدول السابق نجد أن :

ظا $هـ_1$ × ظا $هـ_2$ = -١ أى أن : $م_1 م_2 = -١$

$ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ حيث $م_١$ ، $م_٢$ $\in$ ح*

إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$ **فإن** $م_١ \times م_٢ = -١$

أى أن: حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = -١

وعكس ذلك صحيح؛ **فإذا كان** $م_١ \times م_٢ = -١$ **فإن** $ل_١ \perp ل_٢$

أى أن إذا كان حاصل ضرب ميلى مستقيمين = -١ فإن المستقيمين يكونان متعامدين.

أمثلة

١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، $٣\sqrt{٣}$)، (٥، $٢\sqrt{٣}$) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°.

الحل

نفرض أن ميل المستقيم الأول $م_١$ وميل المستقيم الثانى $م_٢$.

$\because م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ $\therefore م_١ = \frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٤ - ٥} = -\sqrt{٣}$

$\because م = $ طاهـ $\therefore م_٢ = $ ظا ٣٠° $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore م_١ \times م_٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -١$ $\therefore$ المستقيمان متعامدان.

٢ إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص (٤، ٢)، س (٣، ٥)، ع (-٥، أ) قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة أ.

الحل

نوجد ميل $\overleftrightarrow{س ص}$ فيكون $م_١ = \frac{٥ - ٢}{٣ - ٤} = \frac{٣}{-١} = -٣$ ، نوجد ميل $\overleftrightarrow{ص ع}$ فيكون $م_٢ = \frac{أ - ٢}{-٥ - ٤} = \frac{أ - ٢}{-٩}$

$\because \triangle$ س ص ع قائم الزاوية فى ص $\therefore م_١ \times م_٢ = -١$

$\therefore -٣ \times \frac{أ - ٢}{-٩} = -١$ $\therefore \frac{(أ - ٢)}{٣} = -١$

$\therefore أ - ٢ = -٣$ $\therefore أ = ٢ - ٣$ $\therefore أ = -١$

تدرب أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣، -٢)، (٥، ١).

تمارين (٤ ـ ٣)

أولاً : أكمــل ما يأتى

(١) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ يساوى ....

(٢) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ يساوى ....

(٣) ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (-٢، ٣) يساوى ....

(٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨، ٣)، ب (٢، ك) فإن ك = ...

(٥) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ يوازى محور الصادات حيث جـ (م، ٤)، د (-٥، ٧) فإن م تساوى .....

(٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢) فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يساوى ....

(٧) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ، ٠)، (٠، ٣) والمستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن أ = ...

ثانيًا :

(١) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (- ٣، ٤)، جـ (- ٣، - ٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين ب (١، ٢)، د (-٣، ٢) .

(٢) إذا كانت أ (- ١، - ١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠) أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب.

(٣) إذا كان المستقيم $\text{ل}_{١}$ يمر بالنقطتين (٣، ١)، (٢، ك) والمستقيم $\text{ل}_{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°، فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $\text{ل}_{١}$، $\text{ل}_{٢}$:

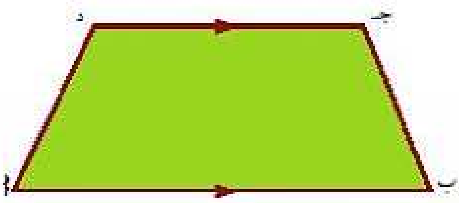
أ متوازيين ب متعامدين

(٤) إذا كانت النقط (٠، ١)، (أ، ٣)، (٢، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ.

(٥) أثبت أن النقط أ (- ١، ١)، ب (٠، ٥)، جـ (٤، ٢)، د (٥، ٦) هى رؤوس لمتوازى أضلاع.

(٦) أثبت باستخدام الميل أن النقط ا (- ١، ٣)، ب (٥، ١)، جـ (٦، ٤)، د (٠، ٦) هى رؤوس مستطيل .

(٧) فى الشكل المرسوم :
أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـد}}$ ،
أ(٩، -٢)، ب (٣، ٢)، جـ (س، -س)،
د (٤، -٣)، أوجد إحداثيى نقطة جـ .



(٨) أثبت أن النقط أ (٤ , ٣)، ب (٧، ٠)، جـ (١، -٢) هى رؤوس مثلث . و إذا كانت نقطة د (١، ٢) فأثبت أن الشكل أب جـ د شبه منحرف وأوجد النسبة بين أد ، ب جـ .

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٤ - ٤

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

مصطلحات أساسية

- معادلة خط مستقيم.
- ميل خط مستقيم.
- جزء مقطوع من محور الصادات.

سبق أن درست العلاقة الخطية بين المتغيرين س، ص وهى :

أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب (كلاهما معًا) ≠ ٠

وتمثيلها بيانيًا بخط مستقيم.

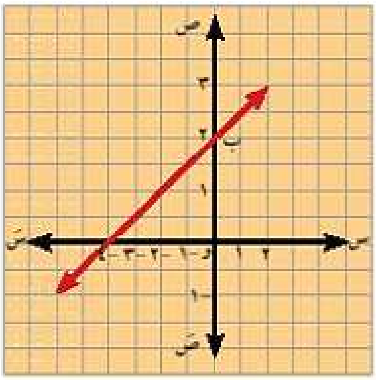
مثال

مثِّل العلاقة : س -٢ص + ٤ = ٠ بيانيًا.

ومن الشكل البيانى احسب :

أ ميل الخط المستقيم.

ب طول الجزء الرأسى المحصور بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات.



لسهولة الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع المحورين كالآتى :

بوضع ص = ٠ ∴ س + ٤ = ٠

∴ س = -٤ (-٤ ، ٠) يحقق العلاقة.

بوضع س = ٠ ∴ -٢ص + ٤ = ٠

∴ ٢ص = ٤ (٠، ٢) يحقق العلاقة

من الرسم نجد أن : ميل الخط المستقيم (م) > ٠ ..... (لماذا؟)

فيكون م = $\frac{......}{......}$ = $\frac{......}{......}$

يسمى البعد المحصور بين النقطتين و، ب بالجزء المقطوع من محور الصادات ويرمز له بالرمز (جـ) و طوله يساوى ٢ وحدة طول.

ويمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة :ص = م س + جـ

فيكون ٢ص = س + ٤ وبقسمة الطرفين على ٢ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

ونلاحظ من هذه الصورة أن : ميل الخط المستقيم (م) هو معامل س ويساوى $\frac{١}{٢}$، وأن طول الجزء المقطوع من محور الصادات جـ = ٢ وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها من الرسم السابق.

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) على الصورة:

ص = م س + جـ   حيث م، جـ $\in$ ح

لاحظ أن: يمكن وضع معادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = صفر، ب $\neq$ ٠
على الصورة: ص = م س + جـ كالآتى:

أ س + ب ص + جـ = صفر   فيكون ب ص = - أ س - جـ

$\therefore$ ص = - $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ س - $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$

وهى على الصورة: ص = م س + جـ

حيث م = $\frac{\text{-أ}}{\text{ب}}$ = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$

، جـ هو طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم ٣ س + ٤ ص - ٥ = صفر بطريقتين
ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

الحل

$\because$ معادلة الخط المستقيم على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠، ب $\neq$ ٠

$\therefore$ ميل المستقيم = $\frac{\text{-أ}}{\text{ب}}$ $\therefore$ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

أو يمكن وضع معادلة الخط المستقيم على الصورة ص = م س + جـ

$\therefore$ ٤ ص = -٣س +٥

ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + $\frac{٥}{٤}$ $\therefore$ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

$\therefore$ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٤}$

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٢) وعمودى على الخط المستقيم المار بالنقطتين أ(٢، -٣)، ب (٥، -٤).

الحل

$\because$ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ، ب = $\frac{-٤ - (-٣)}{٥ - ٢}$ = $\frac{-٤ + ٣}{٥ - ٢}$ = $\frac{-١}{٣}$ فيكون ميل المستقيم العمودى عليه = ٣

$\therefore$ معادلة المستقيم تكون على الصورة: ص = ٣ س + جـ

$\because$ المستقيم يمر بالنقطة (١، ٢) فهى تحقق معادلته.

$\therefore$ ٢ = ٣ × ٢ + جـ $\therefore$ جـ = ٢ - ٦ = -٤

$\therefore$ معادلة المستقيم تكون على الصورة: ص = ٣س - ٤

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

③ إذا كانت أ(-٣، ٤)، ب(٥، -١)، جـ(٣، ٥) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالرأس أ وينصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل

نقطة منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\left(\frac{\text{٣+٥}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٥-١}}{\text{٢}}\right) = \left(\frac{\text{٨}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٤}}{\text{٢}}\right)$ = (٤، ٢)

∴ ميل الخط المستقيم المطلوب = $\frac{\text{٢-٤}}{\text{٤+٣}} = \frac{\text{-٢}}{\text{٧}}$

∵ ص = م س + جـ   ∴ ص = $\frac{\text{-٢}}{\text{٧}}$ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة أ(-٣، ٤) فهى تحقق معادلته

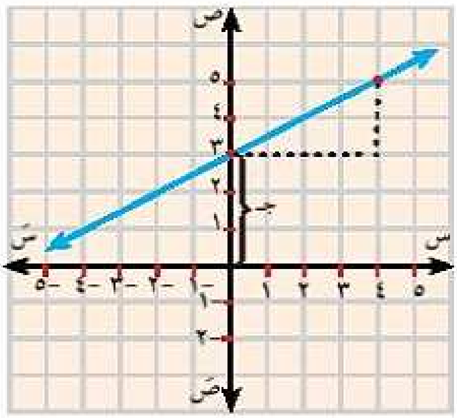
∴ ٤ = $\frac{\text{-٢}}{\text{٧}}$ × -٣ + جـ   ∴ ٤ = $\frac{\text{٦}}{\text{٧}}$ + جـ   ∴ جـ = $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$

∴ معادلة الخط المستقيم تكون على الصورة : ص = $\frac{\text{-٢}}{\text{٧}}$ س + $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$ وبضرب طرفى المعادلة فى ٧

∴ ٧ص = - ٢س + ٢٢   أى المعادلة هى : ٢س + ٧ص - ٢٢ = ٠

تدرب

① فى الشكل المقابل أوجد :



أ ميل الخط المستقيم (م).

ب طول الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ).

جـ معادلة الخط المستقيم بمعلومية م، جـ.

د طول الجزء المقطوع من محور السينات.

هـ مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم والجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات.

تمارين (٤ - ٤)

① إذا كان ص = م س + جـ تمثل معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات ؛ فأكمل ما يأتى :

أ معادلة الخط المستقيم عندما م = ١ ، جـ = ٣ تكون على الصورة ....

ب معادلة الخط المستقيم عندما م = -٢ ، جـ = ١ تكون على الصورة ....

جـ معادلة المستقيم عندما م = ٣ ، جـ = ٠ تكون على الصورة ....

② أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات فى كل مما يأتى :

أ ٢س - ٣ص - ٦ = ٠   ب ٥ س + ٤ص - ١٠ = ٠   جـ $\frac{\text{س}}{\text{٢}} + \frac{\text{ص}}{\text{٣}}$ = ١

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم فى الحالات الآتية :

أ ميله يساوى ٢ و يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات.

ب ميله يساوى ميل الخط المستقيم $\frac{ص-١}{س} = \frac{١}{٢}$ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ .

جـ يمر بالنقطتين (٢، -١) ، (١، ١) .

د معادلة الخط المستقيم عندما م = صفر، جـ = صفر .

٤ ارسم الخط المستقيم في كل من الحالات الآتية:

أ ميله يساوي $\frac{-١}{٢}$ ويقطع جزءًا من الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوي وحدة واحدة.

ب ميله يساوي ٢ ويقطع جزءًا من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوي ٣ وحدات.

جـ يقطع من الجزءين الموجبين للمحورين السيني والصادي جزءين طوليهما ٢، ٣ من الوحدات على الترتيب.

٥ الجدول الآتي يمثل علاقة خطية.

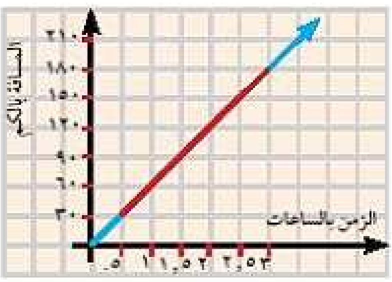
س	١	٢	٣
ص = د (س)	١	٣	أ

أ أوجد معادلة الخط المستقيم.

ب أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

جـ أوجد قيمة أ.

٦ **الشكل المقابل**: يمثل العلاقة بين المسافة (ف) التى تقطعها سيارة بالكيلومتر والزمن (بالساعة) الذى قطعت فيه هذه المسافة.



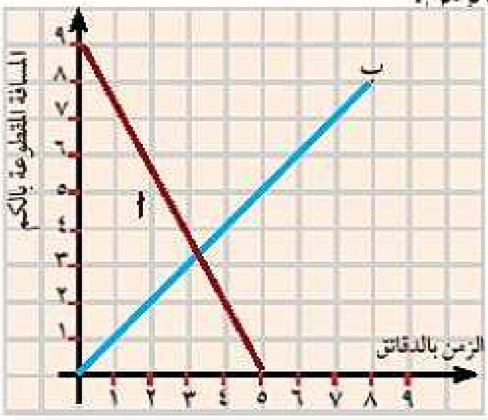
أوجد:

أ المسافة المقطوعة بعد ٩٠دقيقة.

ب الزمن الذى قطعت فيه السيارة ١٥٠ كيلو مترًا.

جـ سرعة السيارة.

د معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن.



٧ الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة (ف) بالكيلومترات والزمن (ن) بالدقائق لكل من الجسمين أ، ب:

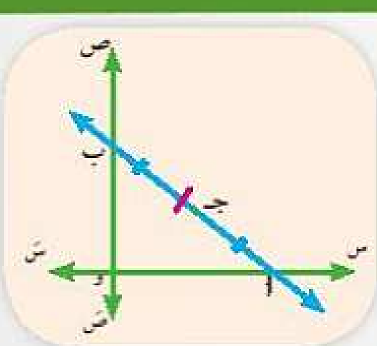
أ هل بدأ أ ، ب الحركة في توقيت واحد؟

ب بعد كم دقيقة التقى أ، ب؟

جـ ما سرعة أ ؟

د اكتب معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لحركة الجسم ب.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة



① في الشكل المقابل :
النقطة جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث جـ (٤، ٣).

أولا : أكمل ما يأتي :

أ و أ = ... وحدة الطول

ب و ب = ... وحدة الطول

ثانيًا : اختر من المجموعة الأولى ما يناسبها من المجموعة الثانية :

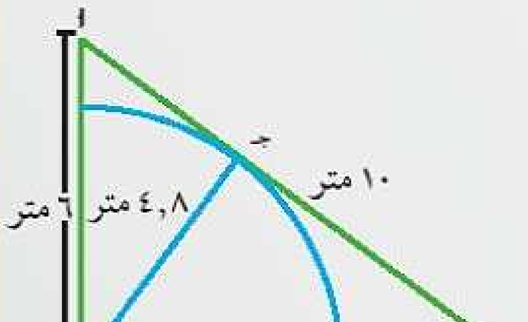
المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
أ ميل $\overleftrightarrow{أب}$	-١
ب ميل $\overleftrightarrow{وجـ}$	$\frac{-٣}{٤}$
جـ ميل $\overleftrightarrow{وأ}$	صفر
د ميل $\overleftrightarrow{وب}$	$\frac{٣}{٤}$
هـ ميل $\overleftrightarrow{وب}$ × ميل $\overleftrightarrow{وأ}$	١
	غير معرف

ثالثًا : أوجد إحداثيات النقط أ، ب، و ، ثم أوجد معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ ، معادلة $\overleftrightarrow{جـو}$.

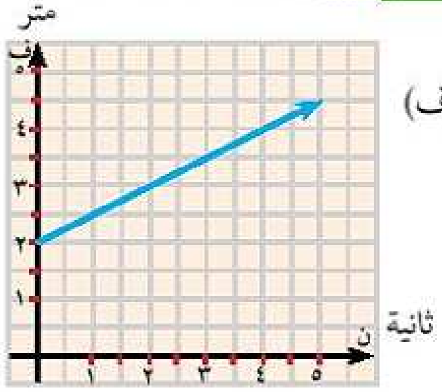
رابعًا : أوجدطول كل من $\overline{جـأ}$، $\overline{جـب}$، $\overline{جـو}$

خامسًا: أثبت بأكثر من طريقة أن جـ مركز الدائرة المارة بالنقط أ، و، ب.

② ربطت بقرة عند نقطة و بحبل طوله ٤،٨ من المتر، فإذا كانت المساحة و أ ب مزروعة بالبرسيم، فاحسب مساحة الأرض المزروعة بالبرسيم التى لاتستطيع أن تأكلها البقرة. لأقرب متر مربع.



اختبار الوحدة



(١) الشكل المقابل :

يمثل حركة جسيم يتحرك بسرعة منتظمة (ع) حيث المسافة (ف) مقيسة بالمتر والزمن (ن) بالثانية ؛ أوجد :

أ المسافة عند بدء الحركة .

ب سرعة الجسيم .

جـ معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسيم .

د المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة .

هـ الزمن الذى يقطع فيه الجسيم مسافة ٣,٥ من المتر من بدء الحركة.

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

(١) المستقيم الذى معادلته ٢س – ٣ص -٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله :

أ -٦ ب -٢ جـ ٢/٣ د ٢

(٢) إذا كان المستقيمان ٣ س -٤ص -٣ = ٠، ك ص + ٤س -٨ = ٠ متعامدين فإن ك =

أ -٤ ب -٣ جـ ٣ د ٤

(٣) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥، ك س + ٢ص = ٠ متوازيين فإن ك تساوى :

أ -٢ ب -١ جـ ١ د ٢

(٤) مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س -٤ص = ١٢، س = ٠، ص = ٠ يساوى :

أ ٦ ب ٧ جـ ١٢ د ١٢

(٥) أب ↔ مستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٥)، (٥، ٢)؛ أى من النقط التالية ∈ أب ↔

أ (١، ٦) ب (٢، ٣) جـ (٠، ٠) د (٣، -٤)

(٦) إذا كان أ(٣، ٥)، ب (٢، -١)، جـ (س، ص) فإن إحداثيى نقطة جـ التى تجعل △ أب جـ قائم الزاوية فى ب هى:

أ (٦، -١) ب (-٤، ٥) جـ (٣، -٢) د (٨، -٢)

(٣) أ (٥، -٦)، ب (٣، ٧)، جـ (١، -٣)؛ فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف ب جـ .

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على أب من نقطة منتصفها حيث أ (١، ٣)، ب (٣، ٥) .

(٥) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، -٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص – ٧ = .

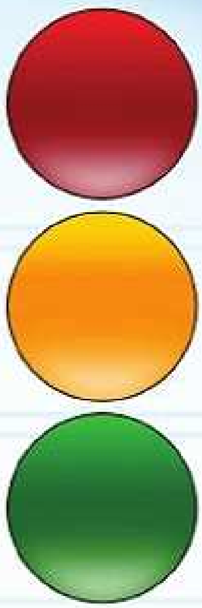
(٦) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢)، (-٢، -١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

(٧) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولهما ٤، ٩ على الترتيب.

(٨) أ ب جـ مثلث فيه أ (١، ٢)، ب (٥، - ٢)، جـ (٣، ٤)، د منتصف أب، رسم د هـ // ب جـ ويقطع أجـ فى هـ ؛ أوجد معادلة المستقيم د هـ .

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الوحدة الخامسة: الهندسة المستوية



يجب أن يعرف سائقو السيارات دلالة علامات المرور جيدا والتمييز بينها

ابحث فى مصادر المعرفة المختلفة (ادارة المرور - المكتبة - الانترنت ...) عن دلالة علامات المرور

٥ - ١

تعاريف ومفاهيم أساسية

سوف تتعلم

- المفاهيم الأساسية المتعلقة بالدائرة.
- مفهوم محور التماثل فى الدائرة.

مصطلحات أساسية

- دائرة
- سطح دائرة
- نصف قطر دائرة
- وتر
- قطر دائرة
- محور تماثل دائرة

فكر وناقش

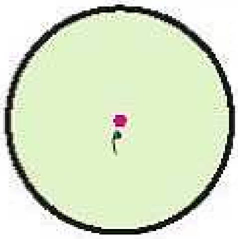
قام يوسف بتشغيل برنامج Google Earth على حاسبه الآلى لدراسة جغرافية مصر. لاحظ يوسف وجود بعض المسطحات الخضراء الدائرية الشكل بجوار المناطق الصحراوية، فسأل والده عنها.

قال الوالد: تعلم أن قطرة ماء تعنى ينبوع حياة، لذلك نرشد استهلاك المياه، فنروى الأراضى بطريقة الرى المحورى (رى بالرش)، وفيها تدور عجلات آلة الرى حول نقطة ثابتة فترسم هذه الدوائر.

١ كيف يمكنك رسم دائرة منتصف ملعب كرة القدم؟

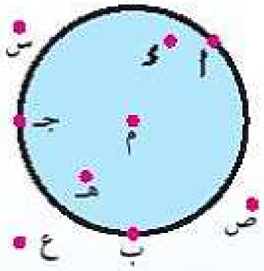
٢ ما دورك فى ترشيد استهلاك المياه؟

الدائرة: هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة من المستوى تسمى **"مركز الدائرة"** ويسمى البعد الثابت **"طول نصف قطر الدائرة"**.



يرمز للدائرة عادة بمركزها، فنقول الدائرة م لنعنى الدائرة التى مركزها النقطة م. **كما فى الشكل المقابل.**

عند رسم دائرة م فى المستوى، فإنها تقسم نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط كما بالشكل، وهى:



١ مجموعة النقط داخل الدائرة

مثل النقط: م، ء، هـ، ....

٢ مجموعة النقط على الدائرة

مثل النقط: أ، ب، جـ، ....

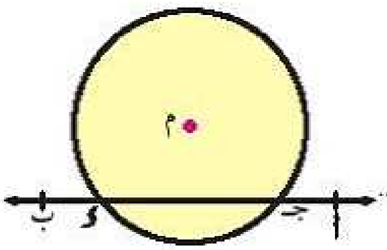
٣ مجموعة النقط خارج الدائرة

مثل النقط: س، ص، ع، ....

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

سطح الدائرة: مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة.

تدرب

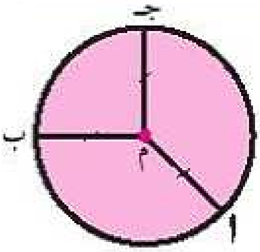


في الشكل المقابل، أكمل:

١ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ الدائرة م = ... ٢ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ سطح الدائرة م = ...

٣ م ∉ الدائرة م، م ∈ ....

نصف قطر الدائرة: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتاها) مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة.



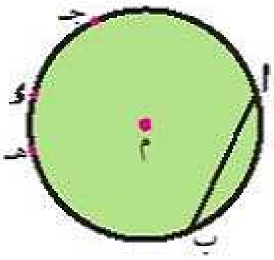
في الشكل المقابل $\overline{\text{م أ}}$، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$ أنصاف أقطار للدائرة م حيث:

م أ = م ب = م جـ = طول نصف قطر الدائرة (نق)

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفي قطريهما

الوتر: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتاها) أي نقطتين على الدائرة

تدرب



في الشكل المقابل:

ارسم جميع أوتار الدائرة التي تمر بأزواج النقط أ، ب، جـ، ى، هـ

القطر: هو الوتر المار بمركز الدائرة

تدرب

١ أي الأوتار في الشكل السابق قطر في الدائرة م؟

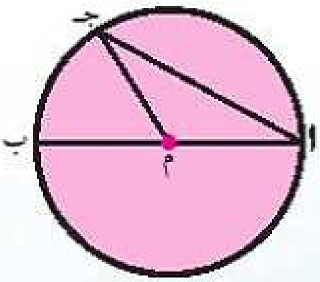
٢ ما عدد أقطار أي دائرة؟

٣ لإثبات أن قطر الدائرة هو أكبر أوتارها طولاً، أكمل:

في المثلث أ م جـ: أ م + م جـ > ....

في الدائرة م: جـ م = ب م (أنصاف أقطار)

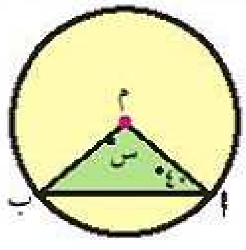
فيكون: أ م + ... > .... ∴ أ ب > ....



٤ إذا كان طول نصف قطر دائرة = نق، فإن طول القطر = ... ويكون محيط الدائرة = ...، مساحة الدائرة = ...

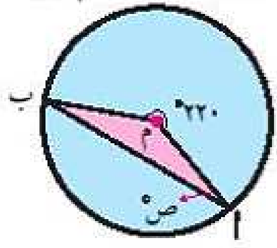
٥ **فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:**

أ



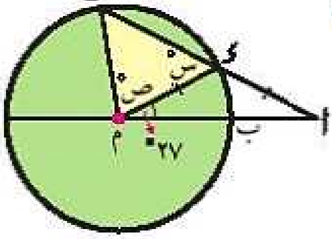
س = ...

ب



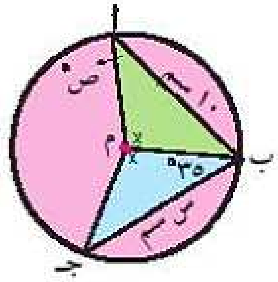
ص = ...

جـ



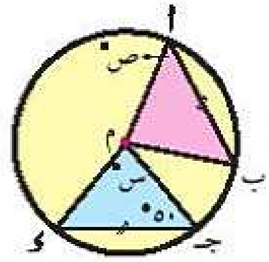
س = ...، ص = ...

د



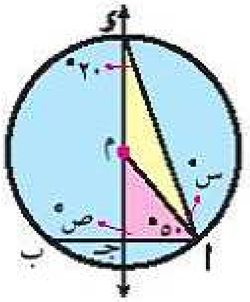
س = ...، ص = ...

هـ



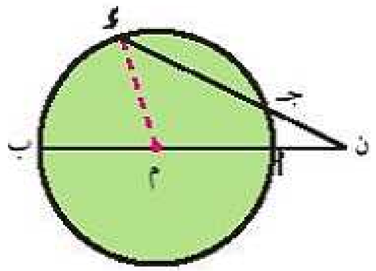
س = ...، ص = ...

و



س = ...، ص = ...

مثال ١



فى الشكل المقابل: $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م. $\overleftarrow{\text{ب أ}} \cap \overleftarrow{\text{ء جـ}} = \{\text{ن}\}$.

أثبت أن: ن ب > ن ء

الحل

نرسم نصف القطر $\overline{\text{م ء}}$، فى Δ ن م ء: م ن + م ء > ن ء

∵ م ب = م ء (أنصاف أقطار)

∴ م ن + م ب > ن ء

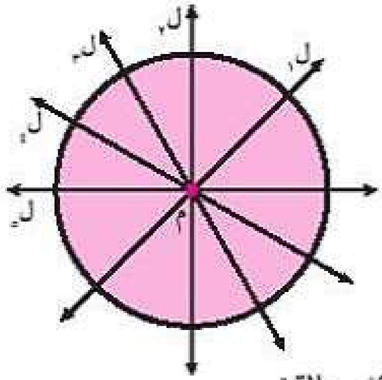
∴ ن ب > ن ء (وهو المطلوب)

تدرب

فى المثال السابق أثبت أن: ن جـ > ن أ.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

التماثل فى الدائرة



نشاط ١

١ ارسم الدائرة م على ورقه شفافة باستخدام الفرجار.

٢ ارسم مستقيمًا $ل_{١}$ يمر بمركز الدائرة ويقسمها إلى قوسين.

٣ اطوِ الورقة حول المستقيم $ل_{١}$، ماذا تلاحظ ؟

٤ ارسم مستقيمًا آخر $ل_{٢}$ يمر بمركز الدائرة ثم اطوِ الورقة حوله .

كرر العمل عدة مرات برسم المستقيمات $ل_{٣}$، $ل_{٤}$، .... ماذا تلاحظ فى كل حالة؟

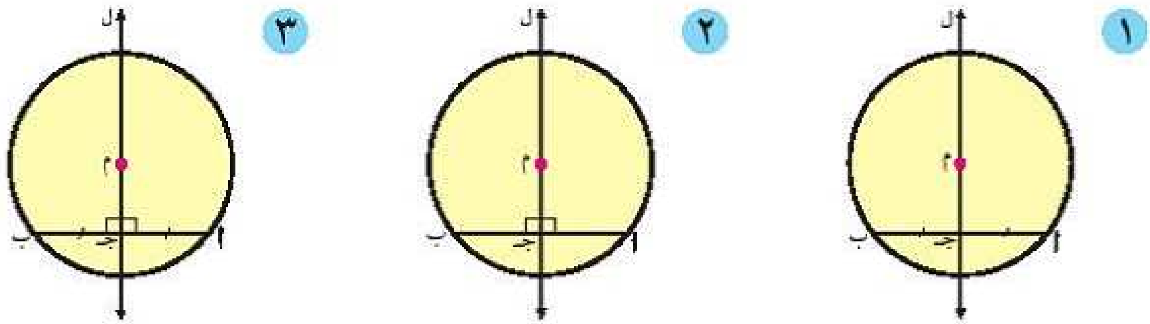
من النشاط السابق نستنتج أن:

أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها

فكر ما عدد محاور التماثل فى الدائرة؟

نشاط ٢

ادرس كلاً من الأشكال التالية (المعطيات كما بالرسم)، ماذا تستنتج؟



الاستنتاج: .... الاستنتاج: .... الاستنتاج: ....

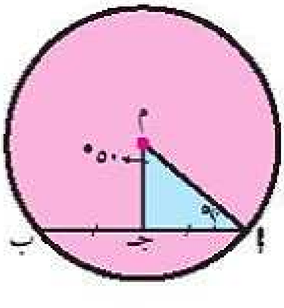
نتائج هامة

من ١	المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديًا على هذا الوتر.
من ٢	المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر.
من ٣	المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة.

تدرب

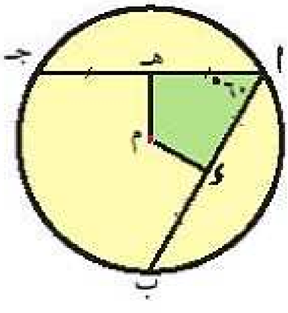
١ في كل من الأشكال الآتية م دائرة، أكمل:

أ



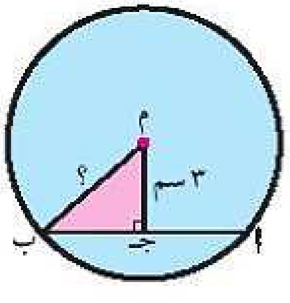
ق (∠ م أ جـ) = ...

ب



ق (∠ ء م هـ) = ...

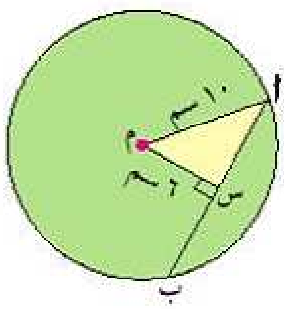
جـ



إذا كان أ ب = ٨سم

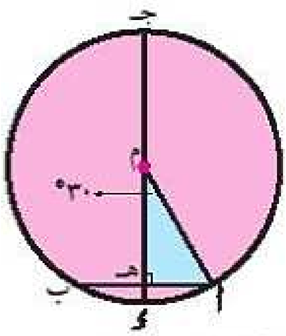
فإن م ب = ...

د



أ ب = ...

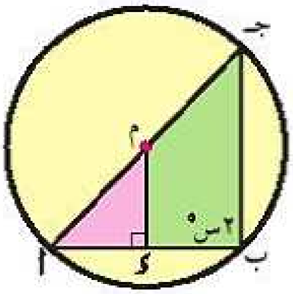
هـ



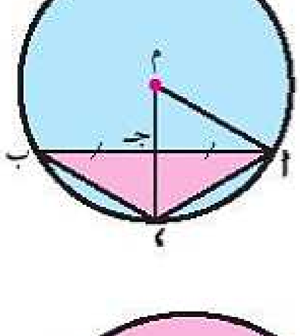
إذا كان أ ب = ١٠سم

فإن جـ ء = ...

و



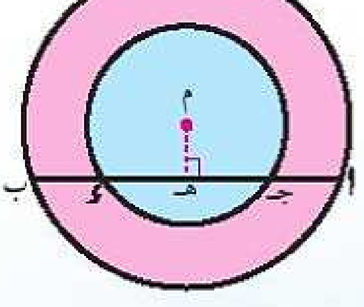
س = ...



٢ فى الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم، أ ب وتر فيها طوله ٢٤سم، جـ منتصف أ ب، م جـ ∩ الدائرة م = {ء}

أوجد مساحة المثلث أ ء ب.

مثال ٢



فى الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز م، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ، ء. **أثبت أن:** أ جـ = ب ء

الحل

المعطيات: أ ب ∩ الدائرة الصغرى = {جـ، ء}

المطلوب: أ جـ = ب ء

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

العمل: نرسم $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ تقطعها فى هـ.

البرهان: فى الدائرة الكبرى $\overleftrightarrow{م هـ} \perp \overline{أب}$ ∴ هـ أ = هـ ب (١) (نتيجة)

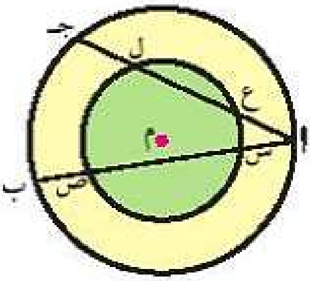
فى الدائرة الصغرى $\overleftrightarrow{م هـ} \perp \overline{جـ ء}$ ∴ هـ جـ = هـ ء (٢) (نتيجة)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن:

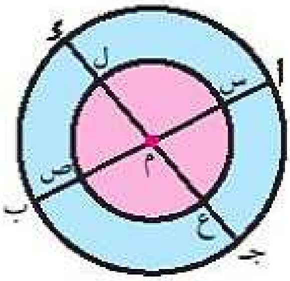
هـ أ - هـ جـ = هـ ب - هـ ء ∴ أ جـ = ب ء (وهو المطلوب)

تدرب

فى الأشكال المقابلة: اذكر القطع المستقيمة المتساوية فى الطول؟ فسر إجابتك.



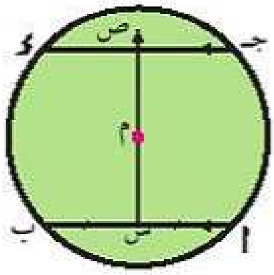
شكل (١)



شكل (٢)

مثال ٣

فى الشكل المقابل: م دائرة، $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، س منتصف $\overline{أب}$ رسم $\overrightarrow{س م}$ فقطع $\overline{جـ ء}$ فى ص. **أثبت أن** ص منتصف $\overline{جـ ء}$



الحل

المعطيات: $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، أ س = ب س

المطلوب: جـ ص = ء ص

البرهان: ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overleftrightarrow{م س} \perp \overline{أب}$

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{س ص}$ قاطع لهما ∴ ق ($\angle$ ء ص س) = ق ($\angle$ أ س ص) = ٩٠° بالتبادل

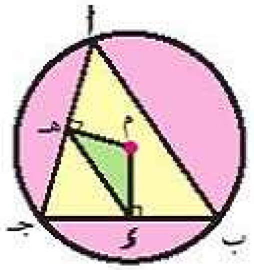
∴ $\overleftrightarrow{م ص} \perp \overline{جـ ء}$ ∴ ص منتصف $\overline{جـ ء}$ (وهو المطلوب)

تدرب

$\overline{أب}$، $\overline{جـ ء}$ وتران متوازيان فى الدائرة م، أ ب = ١٢سم، جـ ء = ١٦سم. أوجد البعد بين هذين الوترين إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠سم. هل توجد إجابات أخرى؟ فسر إجابتك.

فكر إذا كان $\overline{أب}$، $\overline{جـ ء}$ وترين فى دائرة حيث أ ب > جـ ء، أى الوترين أقرب إلى مركز الدائرة؟ فسر إجابتك.

مثال ٤



فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م،

م ء ⊥ ب جـ ، م هـ ⊥ أ جـ

أثبت أن: أولاً: هـ ء // أ ب

ثانيًا: محيط △ جـ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب جـ

الحل

المعطيات: م ء ⊥ ب جـ ، م هـ ⊥ أ جـ

المطلوب: أولاً: هـ ء // أ ب

ثانيًا: محيط △ جـ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب جـ

البرهان:

أولاً: ∵ م ء ⊥ ب جـ ∴ ء منتصف ب جـ (١)

∵ م هـ ⊥ أ جـ ∴ هـ منتصف أ جـ (٢)

فى △ أ ب جـ، ء منتصف ب جـ ، هـ منتصف أ جـ

∴ ء هـ // أ ب (وهو المطلوب أولاً)

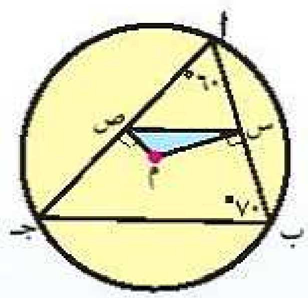
، ء هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب (٣)

ثانيًا: من (١)، (٢)، (٣):

∴ محيط △ جـ ء هـ = جـ ء + جـ هـ + هـ ء = $\frac{١}{٢}$ جـ ب + $\frac{١}{٢}$ أ جـ + $\frac{١}{٢}$ أ ب

= $\frac{١}{٢}$ (جـ ب + أ جـ + أ ب) = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب جـ

حاول



فى الشكل المقابل: فى الدائرة م، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ ،

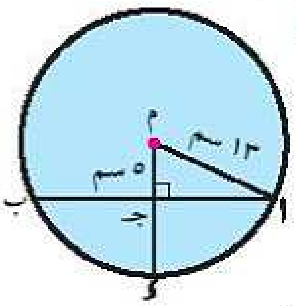
ق (∠ أ) = ٦٠°، **ق** (∠ ب) = ٧٠°

أوجد قياسات زوايا المثلث م س ص

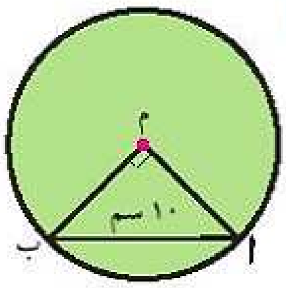
مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تمارين (٥ ــ ١)

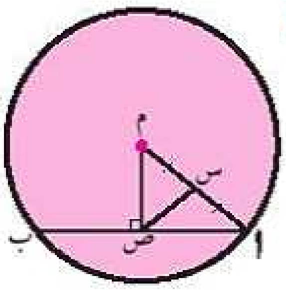
١ فى كل من الأشكال الآتية، م دائرة، أكمل:

أ


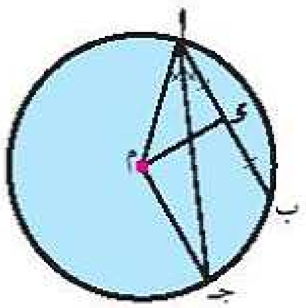
أب = ...
جـ ء = ...

ب


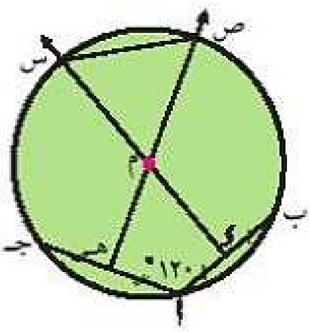
ق (∠ أ) = ...
م أ = ...

جـ


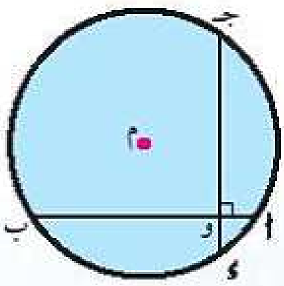
س ص = ٧سم، π = $\frac{٢٢}{٧}$
مساحة الدائرة = ... سم^{٢}



٢ فى الشكل المقابل: أب وتر فى الدائرة م،
أجـ ينصف ∠ ب أ م و يقطع الدائرة م فى جـ.
إذا كان ء منتصف أب
فاثبت أن ء م ⊥ جـ م.



٣ فى الشكل المقابل: أب ، أجـ وتران فى الدائرة م
يحصران زاوية قياسها ١٢٠°.
ء، هـ منتصفا أب ، أجـ على الترتيب. رسم ءم ، هـ م
فقطعا الدائرة فى س، ص على الترتيب.
أثبت أن المثلث س ص م متساوى الأضلاع.



٤ فى الشكل المقابل: دائرة م طول نصف قطرها ٧سم،
أب ، جـ ء وتران متعامدان ومتقاطعان فى النقطة و.
فإذا كان أب = ١٢سم، جـ ء = ١٠سم، **أوجد** طول م و

٥ - ٢

أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

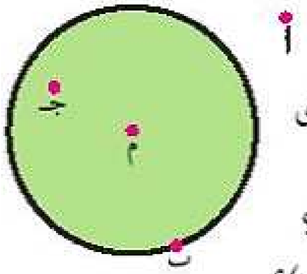
★ تحديد وضع نقطة بالنسبة لدائرة .
★ تحديد وضع مستقيم بالنسبة لدائرة .
★ تحديد علاقة المماس بنصف قطر الدائرة.
★ تحديد وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى.
★ علاقة خط المركزين بالوتر المشترك والمماس المشترك.

مصطلحات أساسية

★ نقطة تقع خارج دائرة
★ نقطة تقع على دائرة
★ نقطة تقع داخل دائرة
★ دائرتان متباعدتان
★ دائرتان متقاطعتان
★ دائرتان متماستان
★ مماس مشترك
★ خط المركزين
★ وتر مشترك

أولا: وضع نقطة بالنسبة لدائرة.

فكر وناقش



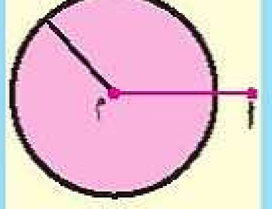
في الشكل المقابل، الدائرة م تجزئ نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط.

١ كيف تحدد وضع النقاط: أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة م؟

٢ ما العلاقة بين (م أ، نق)، (م ب، نق)، (م جـ، نق)؟

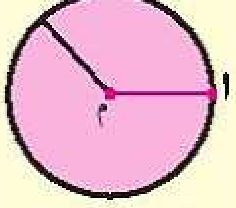
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق، وكانت أ نقطة في مستوى الدائرة، فإن:

١ أ تقع خارج الدائرة



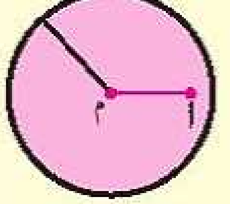
ويكون: م أ > نق
والعكس صحيح

٢ أ تقع على الدائرة



ويكون: م أ = نق
والعكس صحيح

٣ أ تقع داخل الدائرة



ويكون: م أ < نق
والعكس صحيح

تدرب

إذا كانت م دائرة، طول نصف قطرها = ٤ سم، أ نقطة في مستواها، أكمل:

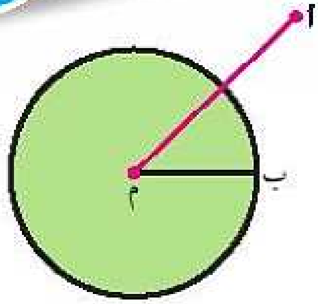
١ **إذا كان:** م أ = ٤سم، فإن أ تقع .... الدائرة م، لأن ....

٢ **إذا كان:** م أ = ٢ √٣ سم، فإن أ تقع .... الدائرة م، لأن ....

٣ **إذا كان:** م أ = ٣ √٣ سم، فإن أ تقع .... الدائرة م، لأن ....

٤ **إذا كان:** م أ = صفرًا، فإن أ تقع .... الدائرة م، ويمثلها ....

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة



مثال ١

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، أ نقطة فى مستوى الدائرة، م أ = ٢س - ٣ من السنتيمترات. **أوجد** قيم س عندما تقع أ خارج الدائرة.

الحل

∵ نقطة أ تقع خارج الدائرة م ∴ م أ > ٥ فيكون: ٢س - ٣ > ٥ أى أن: ٢س > ٨ ∴ س > ٤

تدرب

فى المثال السابق، أوجد قيمة س فى الحالات التالية:

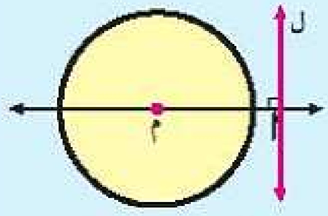
(١) م أ = ٢س + ١، النقطة أ على الدائرة. (٢) م أ = ٨س - ٢٧، النقطة أ داخل الدائرة.

ثانيًا: وضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق، ل مستقيم فى مستويها، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل حيث $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ∩ ل = {أ}، فإن:

(١) المستقيم ل يقع خارج الدائرة م

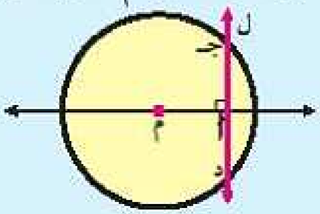
ل ∩ الدائرة م = ϕ



ويكون: م أ > نق
والعكس صحيح

(٢) المستقيم ل قاطع للدائرة م

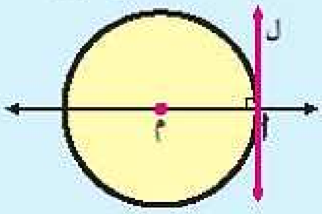
ل ∩ الدائرة م = {جـ، ء}



ويكون: م أ < نق
والعكس صحيح

(٣) المستقيم ل مماس للدائرة م

ل ∩ الدائرة = {أ}



ويكون: م أ = نق
والعكس صحيح

فكر فى كل من الحالات السابقة، أوجد ل ∩ سطح الدائرة م.

تدرب

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧سم، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل حيث أ ∈ ل؛ فأكمل ما يأتى:

(١) **إذا كان** م أ = ٤ $\sqrt{3}$ سم فإن المستقيم ل ....

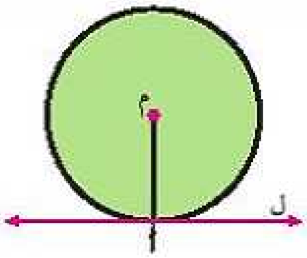
(٢) **إذا كان** م أ = ٣ $\sqrt{7}$ سم فإن المستقيم ل ....

(٣) **إذا كان** ٢ م أ - ٥ = ٩ فإن المستقيم ل ....

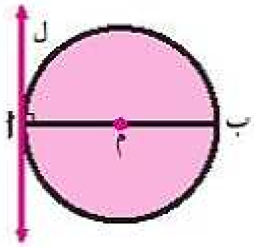
(٤) **إذا كان** المستقيم ل يقطع الدائرة م، م أ = ٣س - ٥ فإن س ∈ ....

(٥) إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م، م أ = س^{٢} - ٢ فإن س ∈ ....

حقائق هامة



- المماس للدائرة يكون عموديًّا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.



- المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسًّا للدائرة.

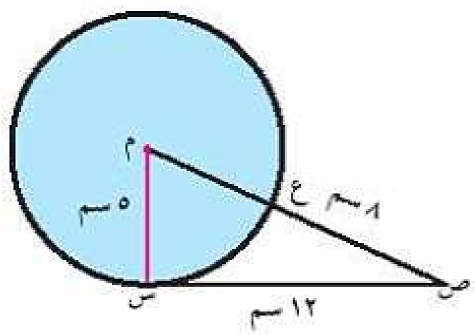
فكر

١ **كم مماسًّا يمكن رسمه للدائرة م؟**

أولاً: من نقطة على الدائرة. ثانيًا: من نقطة خارج الدائرة.

٢ ما العلاقة بين المماسين المرسومين للدائرة من نهايتى أى قطر فيها؟

مثال ٢



فى الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، س ص = ١٢سم، $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع}، ع ص = ٨سم.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م عند س.

الحل

∵ $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع} ∴ م ص = م ع + ع ص

∵ م ع = م س = ٥سم (أنصاف أقطار) ∴ م ص = ٥ + ٨ = ١٣سم

∵ (م ص)^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩ ، (م س)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥ ، (س ص)^{٢} = (١٢)^{٢} = ١٤٤

∴ (م س)^{٢} + (س ص)^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ = (م ص)^{٢}

∴ ق (∠ م س ص) = °٩٠ **(عكس نظرية فيثاغورث)**

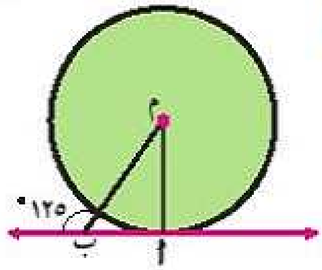
∵ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{م س}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند س **(وهو المطلوب)**

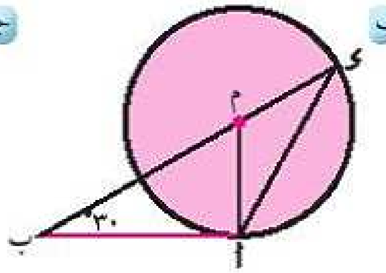
مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تدرب

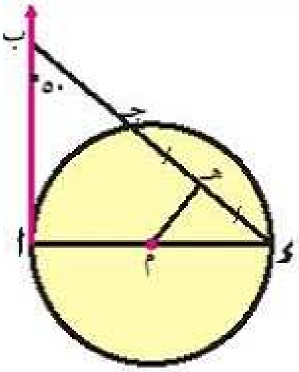
① فى كل من الأشكال الآتية، م دائرة، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس، أكمل:

أ


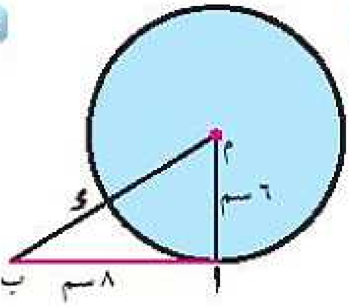
ق (∠ أ م ب) = ...

ب


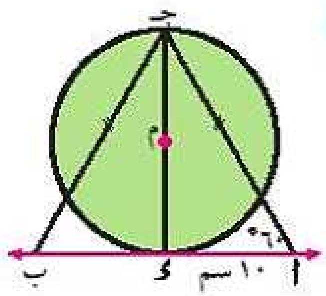
ق (∠ أ ى ب) = ...

جـ


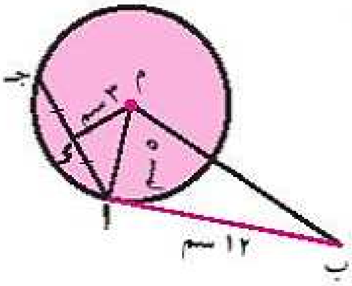
ق (∠ أ م هـ) = ...

د


ى ب = ... سم

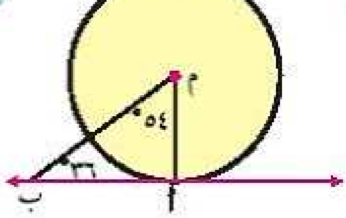
هـ


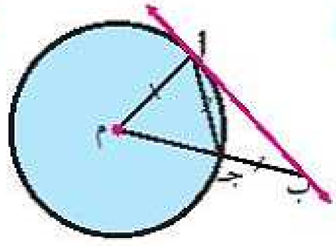
محيط △ أ ب جـ = ... سم

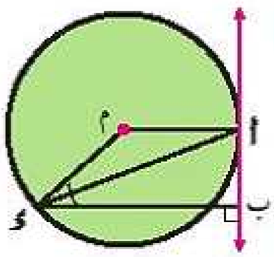
و


محيط الشكل أ ب م ى = ... سم

② فى كل من الأشكال الآتية وضح لماذا يكون $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة م:

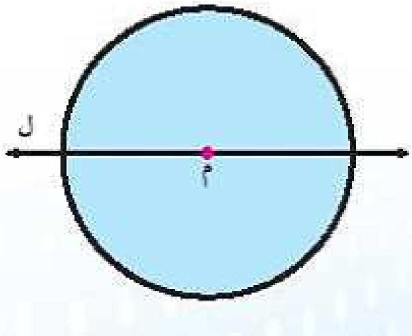
أ


ب


جـ


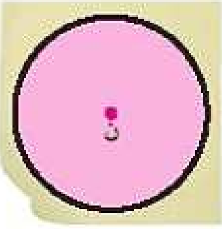
ثالثًا: وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

نشاط



١ ارسم دائرة مركزها م بطول نصف قطر مناسب = $نق_1$ سم.

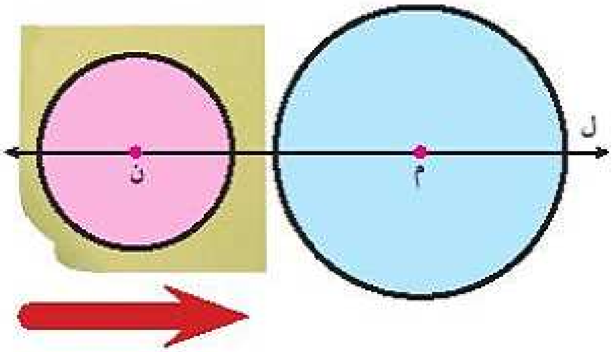
٢ ارسم أحد محاور تماثل الدائرة م وليكن المستقيم ل كما فى الشكل المقابل.



٣ على ورقة شفافة،
ارسم دائرة مركزها ن بطول نصف قطر مناسب = نق$_2$ سم حيث نق$_2$ < نق$_1$.

٤ ضع الورقة الشفافة بحيث تنتمي النقطة ن إلى المستقيم ل .

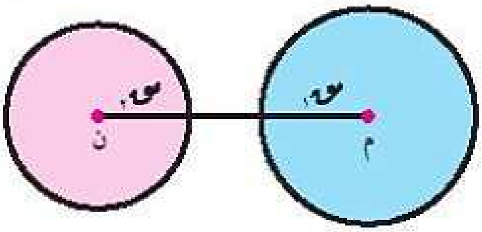
لاحظ أن المستقيم ل = $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ويسمى $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين للدائرتين م، ن وهو محور تماثل لهما.



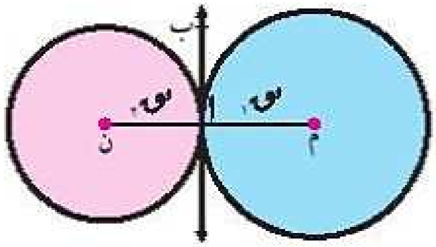
٥ حرك ورقة الشفاف نحو الدائرة م بحيث تظل ن ∈ ل لتشاهد أوضاعًا مختلفة للدائرتين.
قس طول $\overline{\text{م ن}}$ في كل حالة.
ما العلاقة بين طول $\overline{\text{م ن}}$ (**البعد بين مركزي الدائرتين م، ن**)، نق$_1$ + نق$_2$ أو نق$_1$ - نق$_2$ في كل وضع.

تدرب

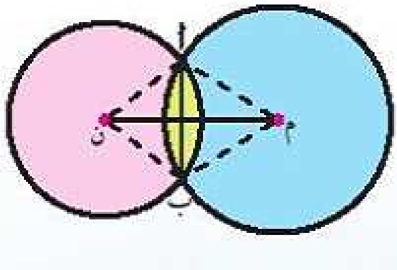
إذا كان م، ن دائرتين في المستوى، طولا نصفي قطريهما نق$_1$، نق$_2$ على الترتيب حيث نق$_1$ > نق$_2$، أكمل:



١ إذا كان: م ن > نق$_1$ + نق$_2$، فإن م ∩ ن = ...،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ...
وتكون الدائرتان متباعدتين.

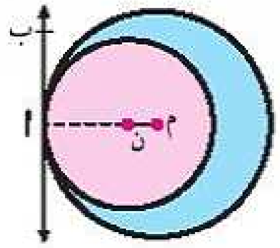


٢ إذا كان: م ن = نق$_1$ + نق$_2$، فإن م ∩ ن = ...،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ...
وتكون الدائرتان متماستين من الخارج.

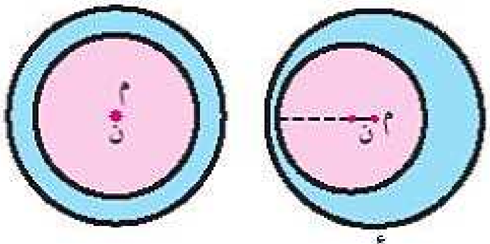


٣ إذا كان: نق$_1$ - نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$،
فإن م ∩ ن = ...،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح المنطقة الصفراء
وتكون الدائرتان متقاطعتين.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة



٤ إذا كان: م ن = نق_1 - نق_2، فإن م ∩ ن = ...،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ...
وتكون الدائرتان متماستين من الداخل.



أ ب

٥ إذا كان: م ن < نق_1 - نق_2، فإن م ∩ ن = ...،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ...
وتكون الدائرتان متداخلتين كما فى شكل ....
وعندما م ن = صفر، تكون الدائرتان متحدتى المركز.
كما فى شكل ....

نتائج

- خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس، ويكون عموديًّا على المماس المشترك.
- خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك وينصفه.

مثال ٣

دائرتان م، ن طولا نصفى قطريهما ٩سم، ٤سم على الترتيب، بين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى الحالات الآتية:

أ م ن = ١٣سم   ب م ن = ٥سم   جـ م ن = ٣سم
د م ن = صفر   هـ م ن = ١٠سم   و م ن = ١٥سم

الحل

∵ نق_1 = ٩سم، نق_2 = ٤سم   ∴ نق_1 + نق_2 = ١٣سم، نق_1 - نق_2 = ٥سم

أ م ن = ١٣سم   ∴ م ن = نق_1 + نق_2 ∴ الدائرتان متماستان من الخارج.

ب م ن = ٥سم   ∴ م ن = نق_1 - نق_2 ∴ الدائرتان متماستان من الداخل.

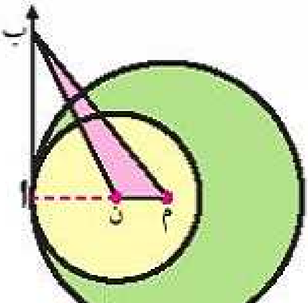
جـ م ن = ٣سم   ∴ م ن < نق_1 - نق_2، م ن ≠ ٠   ∴ الدائرة ن تقع داخل الدائرة م.

د م ن = صفر   ∴ الدائرتان متحدتا المركز.

هـ م ن = ١٠سم   ∴ نق_1 - نق_2 < م ن < نق_1 + نق_2 ∴ الدائرتان متقاطعتان.

و م ن = ١٥سم   ∴ م ن > نق_1 + نق_2 ∴ الدائرتان متباعدتان.

مثال ٤



م، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠سم، ٦سم على الترتيب ومتماستان من الداخل فى أ، أ ب مماس مشترك لهما عند أ. إذا كانت مساحة المثلث ب م ن = ٢٤سم^2، **أوجد** طول أ ب .

الحل

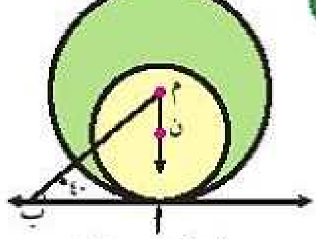
∵ الدائرتان متماستان من الداخل عند أ ∴ أ $\in$ م ن ، م ن $\perp$ أ ب

فيكون طول أ ب ارتفاعًا للمثلث ب م ن الذى قاعدته م ن حيث: م ن = ١٠ - ٦ = ٤ سم (لماذا؟)

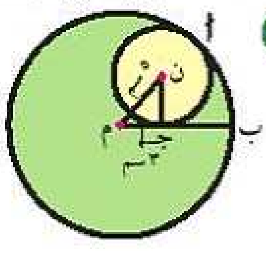
مساحة Δ ب م ن = $\frac{1}{2}$ × م ن × أ ب ∴ ٢٤ = $\frac{1}{2}$ × ٤ × أ ب ∴ أ ب = ١٢ سم

تدرب

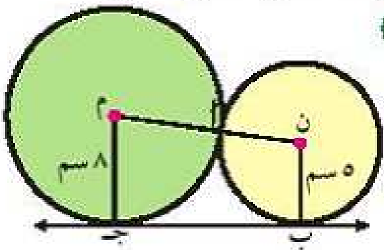
فى كل من الأشكال الآتية الدوائر متماسة مَثْنَى مَثْنَى، باستخدام معلومات كل شكل أكمل:

١) 

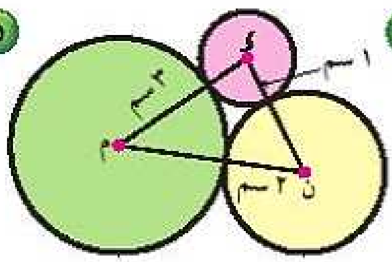
ق (∠ ب م ن) = ...°

٢) 

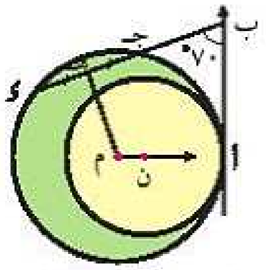
ب جـ = ... سم

٣) 

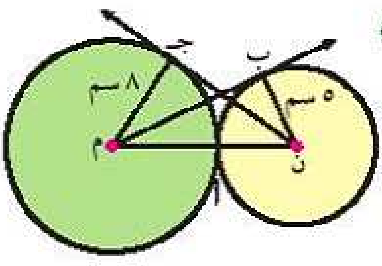
ب جـ = ... سم

٤) 

ق (∠ م ء ن) = ...°

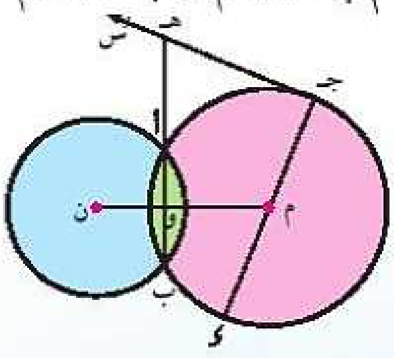
٥) 

ق (∠ هـ م ن) = ...°

٦) 

م ب = ... سم، ن جـ = ... سم

مثال ٥



م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، جـ ء قطر فى الدائرة م،
جـ س مماس للدائرة م عند جـ، جـ س $\cap$ ب أ = {هـ}،
م ن $\cap$ أ ب = {و}. **أثبت أن:** ق (∠ ء م ن) = ق (∠ جـ هـ ب).

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الحل

المعطيات: الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ، ب}، جـ ى قطر في الدائرة م، جـ س مماس للدائرة م.

المطلوب: إثبات أن ق (∠ ى م ن) = ق (∠ جـ هـ ب).

البرهان: ∵ خط المركزين عمودي على الوتر المشترك.

∴ م ن ⊥ أ ب أي ق (∠ أ و م) = ٩٠°

∵ جـ ى قطر في الدائرة م، جـ س مماس عند جـ

∴ جـ س ⊥ جـ ى أي ق (∠ هـ جـ ى) = ٩٠°

∴ ق (∠ جـ هـ و) + ق (∠ جـ م و) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠°) = ١٨٠° (لماذا؟)

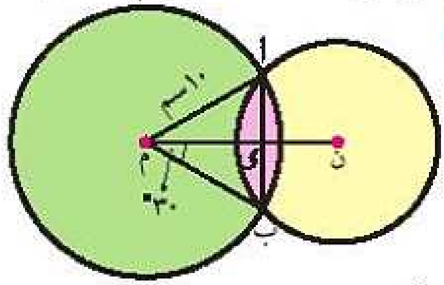
∵ ق (∠ ى م و) + ق (∠ جـ م و) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ى م ن) = ق (∠ جـ هـ و) وهو المطلوب

تدرب

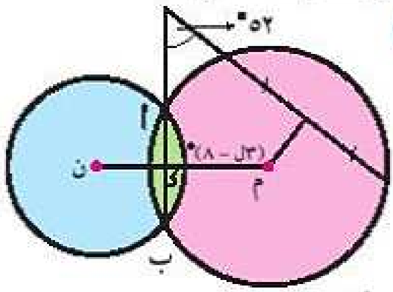
١ في كل من الأشكال الآتية م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب. أكمل:

أ



أ ب = ... سم

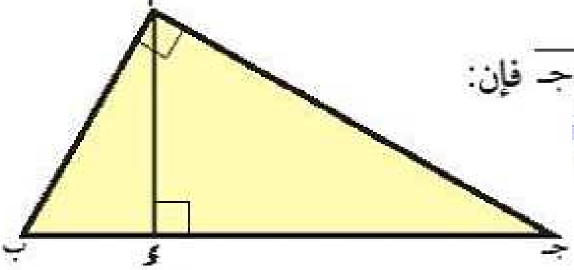
ب



ل = ...

لاحظ أن:

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في أ إذا رسم أ ى ⊥ ب جـ فإن:



$(أ ب)^2$ = ب ى × ب جـ **(نظرية إقليدس)**

، $(أ ى)^2$ = ى ب × ى جـ **(نتيجة)**

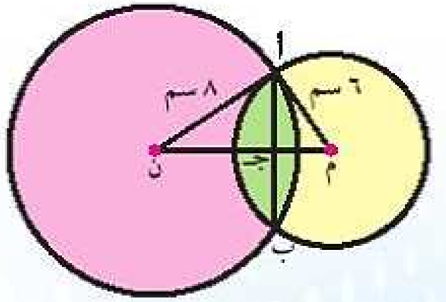
، أ ى × ب جـ = أ ب × أ جـ **لماذا؟**

٢ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب

م ن ∩ أ ب = {جـ}، أ م = ٦ سم، أ ن = ٨ سم،

م أ ⊥ أ ن.

أوجد طول أ ب



تمارين (٥ ـ ٢)

(١) أكمل ما يأتي:

(أ) إذا كان طول قطر الدائرة ٨سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها ٤سم، فإن ل يكون ....

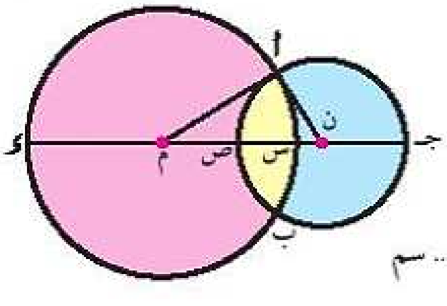
(ب) إذا كان سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = {أ} فإن الدائرتين م، ن تكونان ....

(جـ) م، ن دائرتان متقاطعتان، طولا نصفي قطريهما ٣سم، ٤سم على الترتيب، فإن : م ن $\in$ ....

(د) إذا كانت مساحة الدائرة م = ١٦ π سم^2، أ نقطة فى مستويها حيث م أ = ٨سم، فإن أ تقع .... الدائرة م.

(هـ) دائرة م طول قطرها ٦سم، فإذا كان المستقيم ل يقع خارج الدائرة، فإن بعد مركز الدائرة عن المستقيم ل $\in$ ....

(و) دائرة طول قطرها (٢س + ٥)سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢)سم فإن المستقيم ل يكون ....



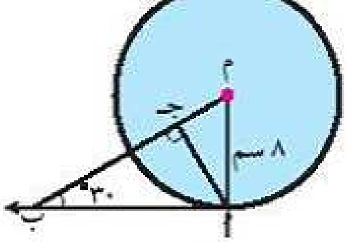
(٢) فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب طولا نصفي قطريهما ٨سم، ٦سم على الترتيب، س ص = ٤سم. ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) **أكمل:** ص م = ...سم ، جـ س = ...سم ، جـ ء = ...سم

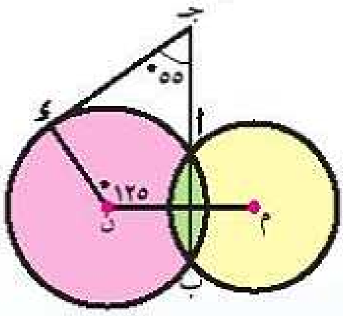
(ب) هل محيط المثلث أ ن م = طول $\overline{\text{جـ ء}}$؟ فسر إجابتك.

(جـ) ما قياس زاوية ن أ م؟ (د) أوجد مساحة المثلث ن أ م.

(هـ) ما طول الوتر المشترك $\overline{\text{أ ب}}$؟



(٣) فى الشكل المقابل: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ، م أ = ٨سم، ق ($\angle$ أ ب م) = ٣٠°. **أوجد** طول كل من: $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$



(٤) فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، جـ $\in$ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، ء $\in$ الدائرة ن، ق ($\angle$ م ن ء) = ١٢٥°، ق ($\angle$ ب جـ ء) = ٥٥° **أثبت أن** $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس للدائرة ن عند ء.

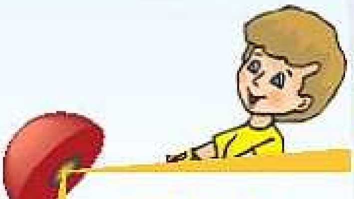
(٥) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماسان للدائرة م، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ قطع الدائرة م فى س، ص ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ فى هـ. **أثبت أن:** جـ س = ص هـ.

(٦) م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، م أ = ١٢سم، ن أ = ٩سم، م ن = ١٥سم. **أوجد** طول $\overline{\text{أ ب}}$.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٥ - ٣

تعيين الدائرة



سوف تتعلم

- كيفية رسم دائرة تمر بنقطة معلومة .
- كيفية رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين.
- كيفية رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة .

مصطلحات أساسية

- دائرة خارجة المثلث.

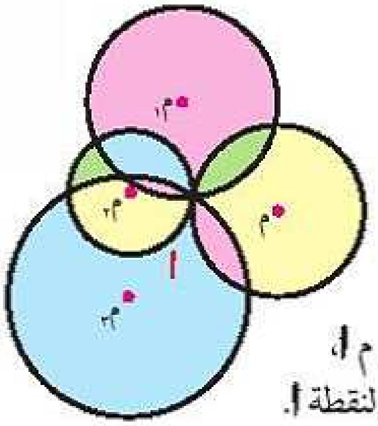
فكر وناقش

- لماذا يستخدم الفرجار فى رسم الدائرة؟
- ما محور القطعة المستقيمة.
- هل مركز الدائرة يقع على محور أى وتر فيها؟
- كيف يمكنك رسم (تعيين) دائرة فى المستوى؟

يمكن رسم (تعيين) دائرة بشروط معطاة، مهما اختلفت، إذا علم:

١ مركز الدائرة. ٢ طول نصف قطر الدائرة.

أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة:



المعطيات: أ نقطة معلومة فى المستوى.

المطلوب: رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

الانشاء:

١ خذ أى نقطة اختيارية مثل م فى نفس المستوى.

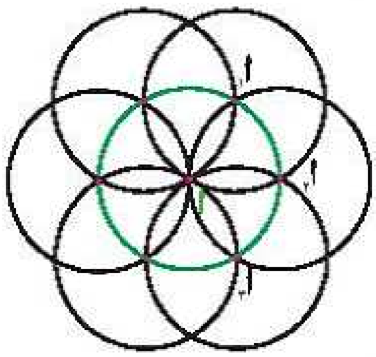
٢ ضع سن الفرجار عند م وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة م، نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة أ.

٣ ضع سن الفرجار عند نقطة أخرى م١ ، وبفتحة تعادل م١ أ ارسم الدائرة م١، نجد أن الدائرة م١ تمر بالنقطة أ.

٤ كرر العمل السابق

> لاحظ: لكل نقطة من اختيارك (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

- كم عدد نقاط المستوى؟ كم عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بالنقطة أ؟
- إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى الطول، أين تقع مراكزها؟



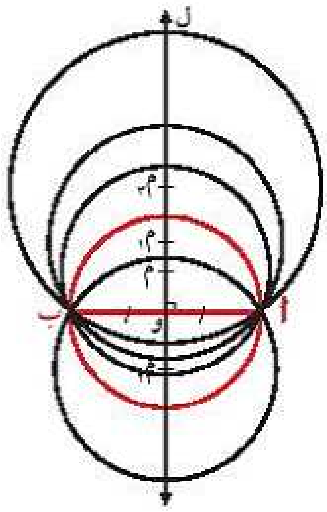
مما سبق نستنتج أن:

١ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل أ.

٢ إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى الطول، فإن مراكزها تقع على دائرة مطابقة لهم ومركزها النقطة أ.

تدرب

إذا كان ل مستقيمًا فى المستوى، أ نقطة معلومة حيث أ ∌ ل، باستخدام الأدوات الهندسية، ارسم دائرة تمر بالنقطة أ، وطول نصف قطرها ٢سم. كم دائرة يمكن رسمها؟ (لا تمحُ الأقواس).



ثانيًا: رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين:

المعطيات: أ، ب نقطتان معلومتان فى المستوى.

المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقطتين أ، ب أى أن $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م.

الإنشاء:

١ ارسم القطعة المستقيمة $\overline{أب}$.

٢ ارسم المستقيم ل محور $\overline{أب}$ حيث ل $\cap$ $\overline{أب}$ = {و}

(مركز الدائرة يقع على محور الوتر $\overline{أب}$).

٣ خذ أى نقطة اختيارية م حيث م ∈ ل، اركز بسن الفرجار فى م وبفتحه تعادل م أ ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطة ب.

٤ ضع سن الفرجار فى نقطة أخرى مثل م١ حيث م١ ∈ ل، وبفتحة تعادل م١أ ارسم الدائرة م١ حيث تمر بالنقطة ب.

٥ كرر العمل السابق ولاحظ:

لكل نقطة من اختيارك (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين أ، ب

- كم عدد نقاط المستقيم ل؟ كم عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بالنقطتين أ، ب؟
- ما طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ، ب؟
- هل يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين؟

مما سبق نستنتج أن:

١ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين مثل أ، ب.

٢ طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لكي تمر بالنقطتين أ، ب يكون مساويًا $\frac{١}{٢}$ أب.

٣ لا يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين.

تدرب

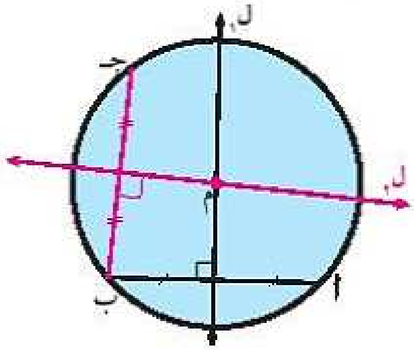
باستخدام أدواتك الهندسية ارسم $\overline{أب}$ طولها ٤سم ثم ارسم على شكل واحد:

١ دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول قطرها ٥سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

٢ دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول نصف قطرها ٢سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

٣ دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول قطرها ٣سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

ثالثًا: رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة:



المعطيات: أ، ب، جـ ثلاث نقاط معلومة فى المستوى.

المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، جـ.

الإنشاء:

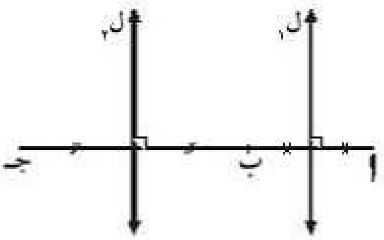
١ ارسم المستقيم $ل_١$ محور $\overline{أب}$ فيكون م $\in$ $ل_١$.

٢ ارسم المستقيم $ل_٢$ محور $\overline{ب جـ}$ فيكون م $\in$ $ل_٢$.

٣ إذا كان $ل_١ \cap ل_٢$ = {م}، ضع سن الفرجار فى النقطة م وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطتين ب، جـ.

٤ إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$؛ فهل يمكنك تعيين موضع النقطة م؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن:



إذا كان أ، ب، جـ على استقامة واحدة فإن $ل_١$ // $ل_٢$، $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$

ولا يمكن رسم دائرة تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، جـ.

مما سبق نستنتج أن:

أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها دائرة وحيدة

تدرب

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٤سم، ب جـ = ٥سم، جـ أ = ٦سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقاط أ، ب، جـ. ما نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لقياسات زواياه؟ وأين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث؟

نتائج

نتيجة (١) الدائرة التى تمر برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجة للمثلث.

كما يقال إن المثلث مرسوم داخل دائرة إذا وقعت رؤوسه على الدائرة.

نتيجة (٢) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث.

تدرب

١ **ارسم المثلث س ص ع الذى فيه س ص = ٥سم، ص ع = ٣سم، ع س = ٧سم، ثم ارسم الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع.**

أ ما نوع المثلث س ص ع بالنسبة لقياسات زواياه؟

ب أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لهذا المثلث؟

٢ ارسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٤سم، ب جـ = ٣سم، ثم ارسم الدائرة الخارجة لهذا المثلث. أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لأضلاع هذا المثلث؟

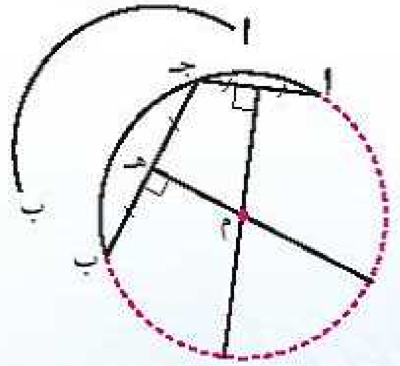
٣ **ارسم المثلث أ ب جـ المتساوى الأضلاع والذى طول ضلعه ٤سم، ارسم الدائرة الخارجة للمثلث أ، ب، جـ.**

أ حدد موضع مركز الدائرة بالنسبة إلى: ارتفاعات المثلث - متوسطات المثلث - منصفات زوايا رؤوس المثلث.

ب كم عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الأضلاع؟

تطبيقات حياتية

نحتاج كثيرًا لمعرفة مركز دائرة قوس لاستكمال رسمه أو دراسة خواصه فى كثير من التطبيقات الحياتية مثل: الكبارى المعلقة - الأنفاق الدائرية - زخارف المبانى - المشغولات المعدنية ...



١ إكمال رسم قوس فى دائرة:

لإكمال رسم $\overset{\frown}{أب}$ (ويقرأ القوس أ ب)

أ اختر النقطة جـ ∈ $\overset{\frown}{أب}$.

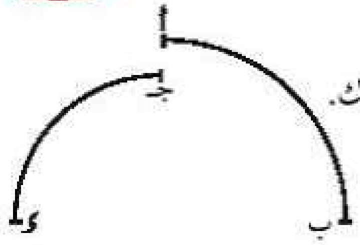
ب عين مركز الدائرة م التى تمر بالنقط أ، ب، جـ.

جـ ضع سن الفرجار فى م وبفتحة تعادل م أ ارسم الدائرة م.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تدرب

١ عين مركز دائرة علامة المرور في الشكل المقابل. ماذا تعني هذه العلامة؟



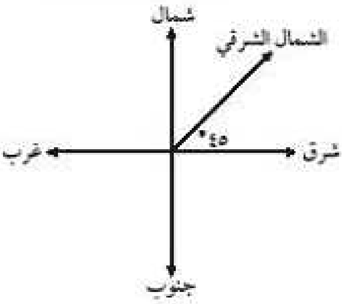
٢ هل $\overset{\frown}{أب}$، $\overset{\frown}{جـ ء}$ قوسان في دائرتين متحدتي المركز؟ فسر إجابتك.

مثال !

تطبيقات حياتية: أبراج هاتف الجوال

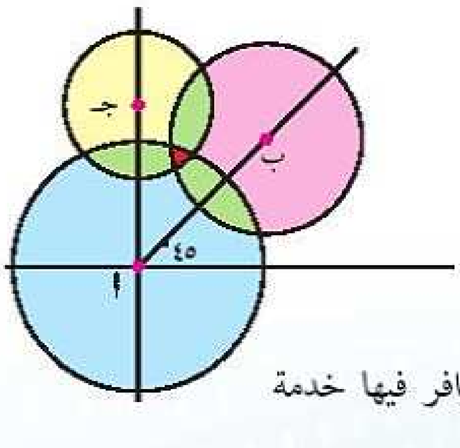
تتنافس شركات الهاتف الجوال في تقديم أفضل خدمة بتركيب أبراج تقوية لشبكاتها. قامت الشركات الثلاث بتركيب أبراجها أ، ب، جـ وكان مدى كل منها ١٧ كم، ١٣ كم، ١٠ كم على الترتيب. فإذا كان البرج ب يقع على بعد ٢٥ كم شمال شرقي أ، البرج جـ يقع على بعد ٢٢ كم شمال أ؛ فحدد بالرسم أفضل منطقة تتوافر فيها خدمة الشبكات الثلاث.

الحل



مدى البرج أ هو دائرة مركزها أ وطول نصف قطرها ١٧ كم، مدى البرج ب هو دائرة مركزها ب وطول نصف قطرها ١٣ كم، مدى البرج جـ هو دائرة مركزها جـ وطول نصف قطرها ١٠ كم.

باختيار مقياس رسم مناسب حيث كل ١سم بالرسم يمثل ١٠ كم نرسم كلاً من الدوائر الثلاث.



يلاحظ أن:

أفضل منطقة تتوافر فيها خدمة الشبكات الثلاث هي المنطقة التي جميع نقاطها تقع داخل كل من الدوائر الثلاث.

∴ أفضل منطقة لخدمة الشبكات الثلاث هي المنطقة الحمراء بالرسم.

فكر كيف يمكن زيادة مساحة المنطقة التي تتوافر فيها خدمة الشبكات الثلاث؟ فسر إجابتك.

تدرب

قررت ثلاث قرى أ، ب، جـ اختيار قطعة أرض لبناء مدرسة جديدة لا تبعد أكثر من ٦ كم عن وسط أى قرية. فإذا كانت القرية أ تقع شرق القرية ب بمسافة ١٠ كم، القرية جـ تقع شمال غربي القرية أ بمسافة ٨ كم؛ **فحدد** بالرسم المنطقة التى يمكن أن تبنى بها المدرسة.

تمارين (٥ – ٣)

١ أكمل ما يأتى:

أ عدد الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

ب أى ثلاث نقط لا تنتمي لمستقيم واحد تمر بها ....

جـ الدائرة التى تمر برؤوس مثلث تسمى ....

د مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع ....

هـ إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو ....

و عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بأى ثلاثة رؤوس لمتوازى أضلاع هو ....

٢ أب طولها ٦سم، ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول نصف قطر كل منها ٤سم. كم دائرة رسمتها؟

٣ إذا كان ل مستقيمًا فى المستوى، أ نقطة حيث أ ∈ ل، فارسم دائرة م بحيث م ∈ ل وطول نصف قطرها ٣سم وتمر بالنقطة أ. كم عدد الحلول؟

٤ ارسم ثلاث دوائر متماسة من الخارج مَثْنَى مَثْنَى أطوال أنصاف أقطارها ٢سم، ٣سم، ٤سم.

٥ ارسم المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٦سم، ق (∠ أ) = ٤٠° وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ يساوى ٥سم. وإذا كانت ء منتصف أب؛ فاحسب طول م ء حيث م مركز الدائرة الخارجة للمثلث.

٦ إذا كان ل مستقيمًا فى المستوى، أ ∉ ل، ارسم الدائرة م حيث م ∈ ل تمر بالنقطة أ والتى طول نصف قطرها ٣سم. ناقش جميع الحلول الممكنة وارسم الشكل فى كل حالة.

٧ أ نقطة معلومة داخل دائرة مركزها م، بَيِّنْ كيف ترسم وترًا فى هذه الدائرة بحيث تكون أ منتصف هذا الوتر.

٨ ارسم دائرة طول نصف قطرها ٢سم تمس مستقيمًا ل. كم عدد الحلول الممكنة؟

٩ ارسم ل$_1$، ل$_2$ مستقيمين متوازيين البعد بينهما ٣سم، ثم ارسم دائرة مركزها م حيث م ∈ ل$_1$ وتمس ل$_2$.

١٠ **تطبيقات حياتية:** فى الشكل المقابل:

يمثل نموذج لمقطع فى أحد الأنفاق الدائرية للسيارات مرسوم بمقياس رسم ١ : ٢٠٠. **أوجد** طول القطر الحقيقى لهذا النفق وأكبر ارتفاع له.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٥ - ٤

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

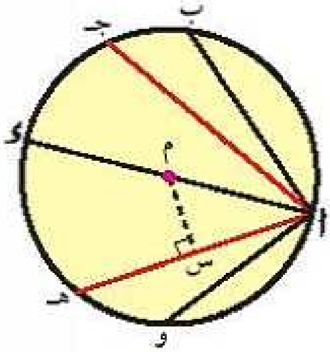
سوف تتعلم

- استنتاج العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها.
- كيفية حل مسائل على العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها

مصطلحات أساسية

- أوتار متساوية
- دوائر متطابقة

فكر وناقش



فى الشكل المقابل:

أ نقطة على الدائرة م، رسمت فيها الأوتار $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$، $\overline{أى}$، $\overline{أهـ}$، $\overline{أو}$.

١ ما العلاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة؟

٢ إذا تساوت الأوتار فى الطول، ماذا تستنتج؟

٣ إذا تساوت أبعاد الأوتار عن مركز الدائرة ماذا تتوقع؟

لاحظ أن:

بُعْد الوتر $\overline{أهـ}$، عن مركز الدائرة م = م س حيث س منتصف الوتر $\overline{أهـ}$، فى الدائرة م التى طول نصف قطرها **نق**.

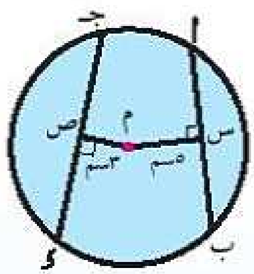
فيكون: $(م س)^2 + (أ س)^2 = (أ م)^2 = نق^2$ (مقدار ثابت)

أى أن:

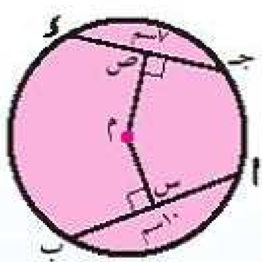
كلما اقترب الوتر من مركز الدائرة زاد طوله والعكس صحيح.

تدرب

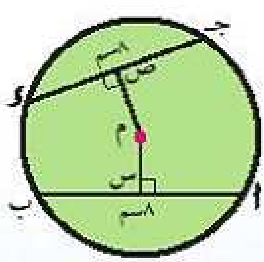
١ أكمل باستخدام (> أ، < أ، =):



أب .... جـى

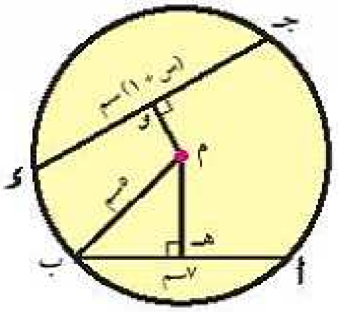


م س .... م ص



م س .... م ص

٢ فى الشكل المقابل م و < م هـ **أكمل:**



∵ م و < م هـ ∴ جـ ء > ....

∴ س + ١ > .... ∴ س > ....

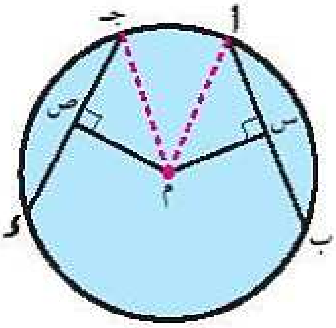
∵ جـ ء وتر فى الدائرة م ∴ جـ ء ≥ ....

∴ س ≥ .... ويكون .... > س ≥ ....

أى أن: س ∈ ....

نظرية

الأوتار المتساوية الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.



المعطيات: أ ب = جـ ء، م س ⊥ أ ب، م ص ⊥ جـ ء.

المطلوب: إثبات أن م س = م ص.

العمل: نرسم م أ، م جـ.

البرهان: ∵ م س ⊥ أ ب ∴ أ س = $\frac{1}{2}$ أ ب.

∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ جـ ص = $\frac{1}{2}$ جـ ء.

∵ أ ب = جـ ء ∴ أ س = جـ ص.

∵ المثلثين أ س م، جـ ص م، فيهما:

أ م = جـ م

ق (∠ أ س م) = ق (∠ جـ ص م) = ٩٠°

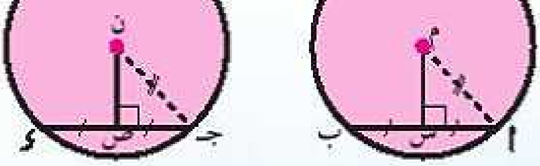
أ س = جـ ص (برهاناً)

∴ Δ أ س م ≡ Δ جـ ص م وينتج أن: م س = م ص (وهو المطلوب)

نتيجة **الأوتار المتساوية الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز.**

فى الشكل المقابل:

الدائرتان م، ن متطابقتان، أ ب = جـ ء، م س ⊥ أ ب، ن ص ⊥ جـ ء، فإن: م س = ن ص.

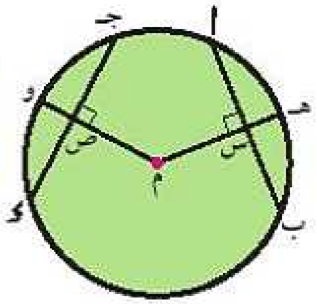


مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

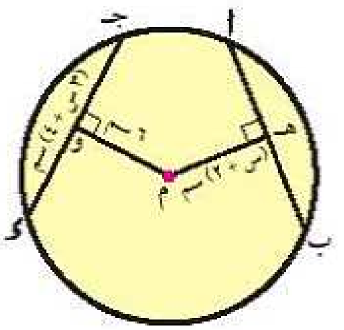
تدرب

ادرس الشكل ثم أكمل:

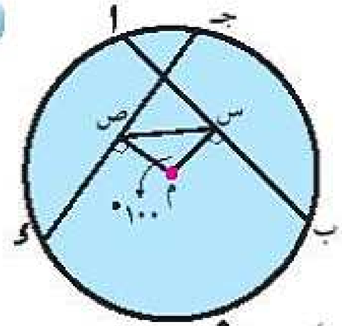
أ إذا كان:
أ ب = جـ ء
فإن:
م س = ...
∵ م هـ = ...
∴ هـ س = ...



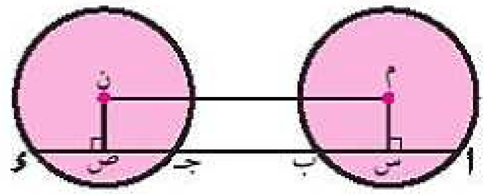
ب إذا كان:
أ ب = جـ ء
فإن:
م هـ = ...
∴ س = ... سم،
جـ ء = ... سم



جـ إذا كان:
أ ب = جـ ء
فإن:
م س = ...
في Δ م س ص:
∵ ق (∠ س م ص) = ١٠٠°
∴ ق (∠ م س ص) = ...°

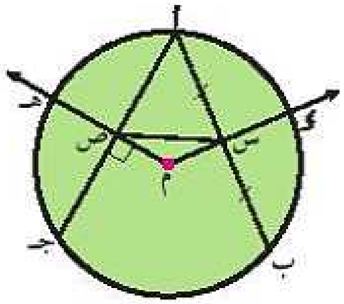


د



إذا كان: م ، ن دائرتين متطابقتين، أ ب = جـ ء
فإن: م س = ... والشكل م س ص ن..........

مثال



أ ب ، أ جـ وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س منتصف أ ب ، م س يقطع الدائرة في ء، م ص ⊥ أ جـ يقطعه في ص ويقطع الدائرة في هـ.

أثبت أن: أولاً: س ء = ص هـ.

ثانيًا: ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ)

المعطيات: أ ب = أ جـ، س منتصف أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

المطلوب: إثبات أن:

أولاً: س ء = ص هـ

ثانيًا: ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ)

البرهان: ∵ س منتصف أ ب
∴ م س ⊥ أ ب .
∵ أ ب = أ جـ، م س ⊥ أ ب، م ص ⊥ أ جـ
∴ م س = م ص
∵ م ء = م هـ = نق

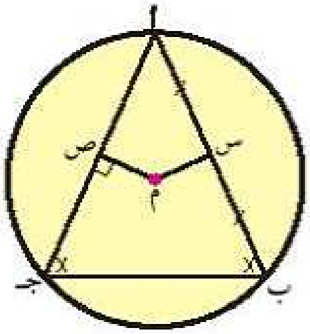
∴ م ء - م س = م هـ - م ص ∴ س ء = ص هـ **(المطلوب أولاً)**

في Δ م س ص: ∵ م س = م ص ∴ ق (∠ ص س م) = ق (∠ س ص م) (١)

∵ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∴ ق (∠ م س ب) = ق (∠ م ص جـ) = ٩٠° (٢)

من (١) و (٢) ينتج أن: ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ) **(وهو المطلوب ثانيًا)**

تدرب



في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م، فيه:

ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$.

أثبت أن: م س = م ص

عكس النظرية

في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول.

تدرب

ادرس الشكل ثم أكمل:

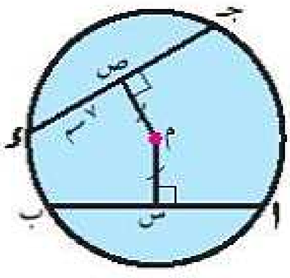
١ إذا كان:

م س = م ص،

ص ء = ٧سم

فإن:

أ ب = ... سم



٢ إذا كان:

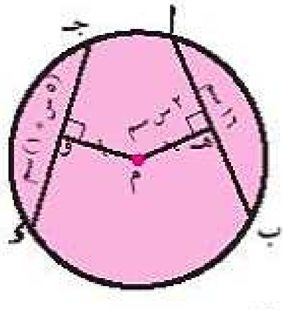
م هـ = م و

فإن:

جـ ء = ...

∴ س = ...،

هـ م = ... سم ، أم = ... سم



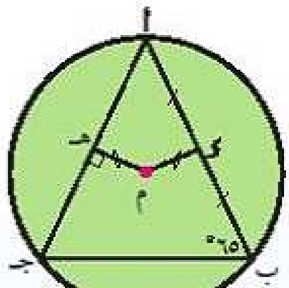
٣ إذا كان:

م ء = م هـ

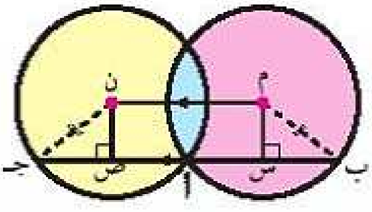
ق (∠ ب) = ٦٥°

فإن:

ق (∠ أ) = ...°



٤

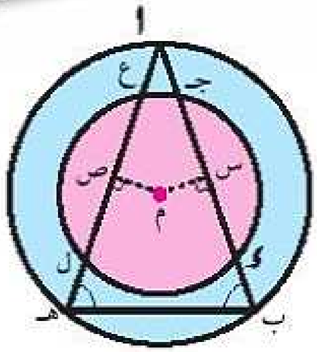


∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ م س = ...

∵ الدائرتين م، ن ....،

أ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ أ ب = ...

أمثلة



٢ دائرتان متحدتا المركز م، رسم $\overline{\text{أ ب}}$ وترًا فى الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى فى جـ، ى، ورسم $\overline{\text{أ هـ}}$ وترًا فى الدائرة الكبرى أيضًا فقطع الدائرة الصغرى فى ع، ل.
إذا كان ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ أ هـ ب)، **فأثبت أن:** جـ ى = ع ل.

الحل

المعطيات: ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ أ هـ ب)

المطلوب: إثبات أن جـ ى = ع ل

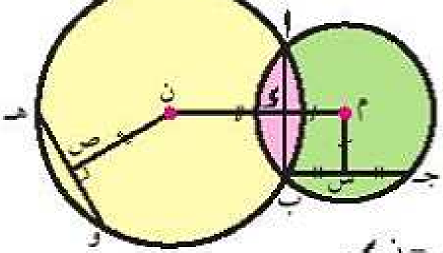
العمل: نرسم $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ هـ}}$

البرهان: فى Δ أ ب جـ: ∵ ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ أ هـ ب) ∴ أ ب = أ هـ

فى الدائرة الكبرى: ∵ أ ب = أ هـ (برهانًا) ∴ م س = م ص (نظرية)

فى الدائرة الصغرى: ∵ م س = م ص (برهانًا)

∴ جـ ى = ع ل (عكس النظرية) (وهو المطلوب)



٣ فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب،
$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = {ى}، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{ن ص}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ و}}$ ،
م س = م ى، ن ص = ن ى. **أثبت أن:** ب جـ = هـ و.

الحل

المعطيات: س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{ن ص}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ و}}$ ، م س = م ى، ن ص = ن ى.

المطلوب: إثبات أن: ب جـ = هـ و

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك للدائرتين م، ن. ∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

فى الدائرة م: ∵ س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{م ى}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، م س = م ى

∴ ب جـ = أ ب (عكس النظرية) (١)

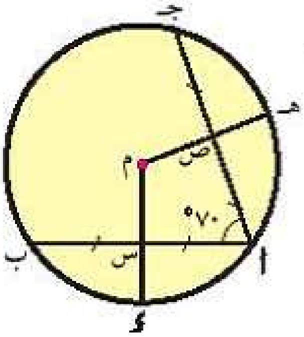
فى الدائرة ن: ∵ $\overline{\text{ن ص}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ن ى}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ن ص = ن ى

∴ هـ و = أ ب (عكس النظرية) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ب جـ = هـ و (وهو المطلوب)

فكر إذا كانت م، ن دائرتين متطابقتين ومتقاطعتين فى أ، ب؛ فهل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور $\overline{\text{م ن}}$ ؟ فسر إجابتك.

تمارين (٥ ــ ٤)



١ في الشكل المقابل: أب ، أجـ وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س منتصف أب ، ص منتصف أجـ، ق (∠ جـ أ ب) = ٧٠°.

أ إحسب ق (∠ ء م هـ). ب أثبت أن: س ء = ص هـ.

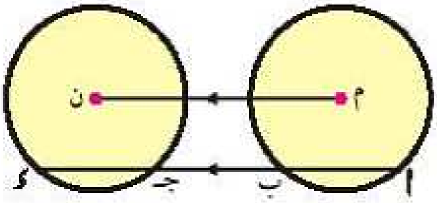
٢ أب ، أجـ وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س، ص منتصفا أب ، أجـ، ق (∠ م س ص) = ٣٠°.

أثبت أن: أولاً: المثلث م س ص متساوي الساقين. ثانيًا: المثلث أ س ص متساوي الأضلاع.

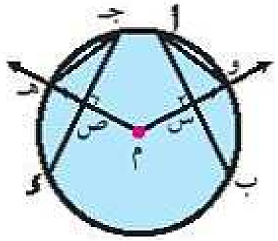
٣ أب ، أجـ وتران في الدائرة م، م س ⊥ أب ، ص منتصف أجـ ، ق (∠ أ ب جـ) = ٧٥°، م س = م ص.

أ أوجد ق (∠ ب أ جـ). ب أثبت أن: محيط Δ أ س ص = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب جـ.

٤ دائرتان متحدتا المركز م، أب ، جـ ء وتران في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في س، ص على الترتيب. أثبت أن أب = أجـ.

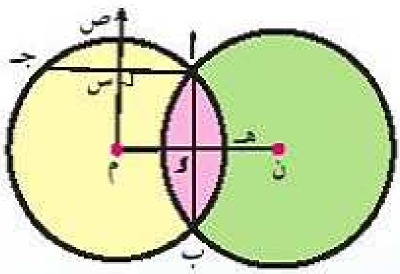


٥ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متطابقتان، رسم أب // م ن فقطع الدائرة م في أ، ب وقطع الدائرة ن في جـ، ء. أثبت أن: أجـ = ب ء.



٦ أب ، جـ ء وتران في الدائرة م، م س ⊥ أب ويقطع الدائرة في ء، م ص ⊥ جـ ء ويقطع الدائرة في هـ، ء س = هـ ص.

أثبت أن: أولاً: أب = جـ ء ثانيًا: أو = جـ هـ



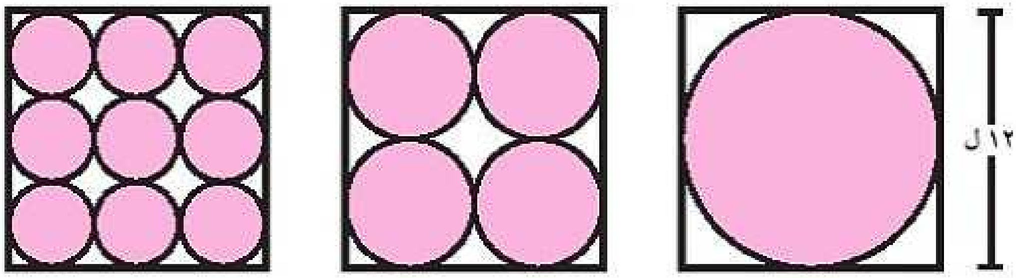
٧ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، رسم م س ⊥ أجـ يقطع أجـ في س ويقطع الدائرة م في ص. ورسم م ن يقطع أب في ء والدائرة م في هـ. إذا كان أجـ = أب، أثبت أن: س ص = ء هـ.

٨ م، ن دائرتان متماستان من الداخل في أ، رسم أب ، أجـ وتران متساويان في الطول في الدائرة الكبرى فقطعا الدائرة الصغرى في ء، هـ على الترتيب. أثبت أن: أء = أهـ.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الأنماط الهندسية

١ يقوم مخبز بإنتاج فطائر دائرية الشكل ثم وضعها فى علب مربعة طول ضلع كل منها ١٢ ل سم، كما فى النمط التالى.



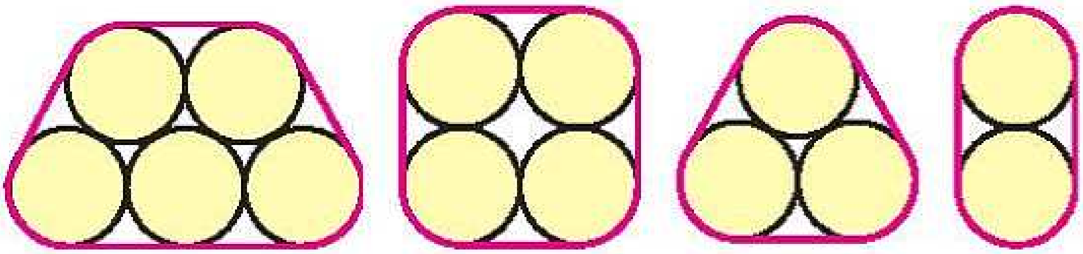
أ احسب المساحة التى تشغلها الفطائر فى كل علبة وسجل ملاحظاتك.

ب ما المساحة التى تشغلها فطائر العلبة الرابعة وفطائر العلبة العاشرة من هذا النمط؟

جـ إذا كانت جميع الفطائر من نفس النوع ومتساوية فى الارتفاع. فهل تكون أثمان العلب متساوية أم مختلفة. فسر إجابتك.

٢ مصنع لإنتاج المربى يعبأ إنتاجه فى عبوات أسطوانية الشكل طول نصف قطر قاعدتها نق سم، تم تغليفها بالبلاستيك ولصق شريط من الورق حولها كما فى النمط التالى.

عدد العلب ← ١ ٢ ٣ ٤

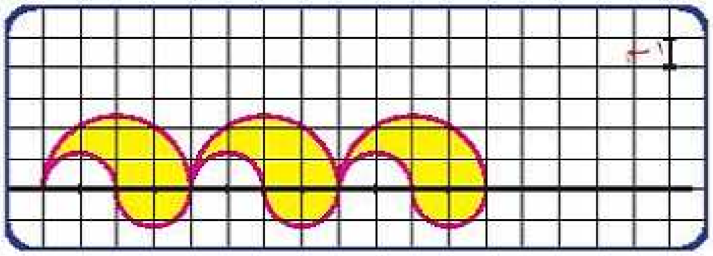


أ احسب طول الشريط فى كل حالة، هل توجد علاقة بين عدد العلب وطول الشريط؟

ب ما طول الشريط الذى يدور حول ٦ علب؟

جـ ما طول الشريط الذى يدور حول ٧ علب؟ ناقش الأوضاع الممكنة لضم العلب واستنتج شرط استمرار نفس النمط لحساب طول الشريط.

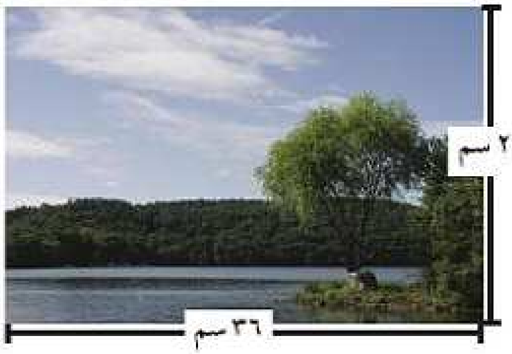
٣ ادرس النمط المقابل ثم ارسم الوحدة التالية لهذا النمط.



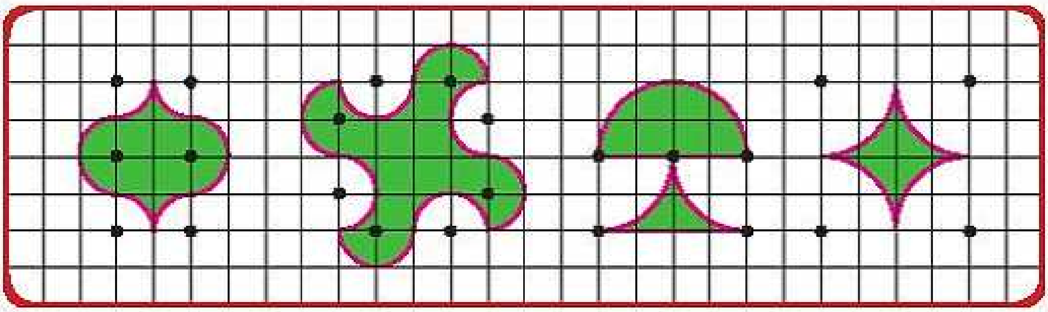
أ ما مساحة ١٠ وحدات من نفس النمط؟

ب ما محيط ٧ وحـدات من هذا النمط؟

جـ كم عدد الوحدات التى يمكن استخدامها فى تصميم إطار حول صورة على شكل مستطيل بعداه ٢٤سم، ٣٦سم؟

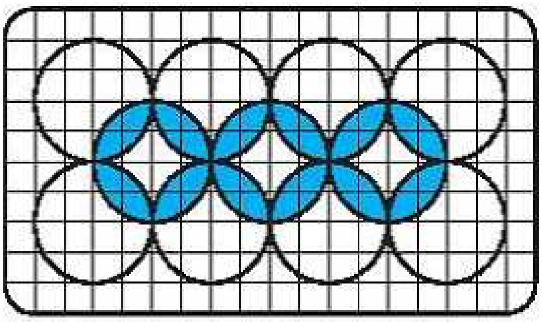


٤ ادرس كلاً من الوحدات التالية، ثم أوجد مساحة ومحيط كل وحدة.

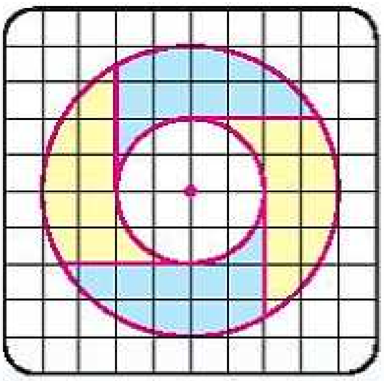


٥ **تكنولوجيا:** استخدم برامج الحاسب الآلى فى رسم التشكيلات الفنيه التالية:

أ تماس وتقاطع الدوائر المتطابقة.



ب التماس والدوائر المتحدة المحور.



ابتكر نماذج أخرى واستخدمها فى دراستك لمادة التربية الفنية.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

تمارين عامة

١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:

أ وتر الدائرة هو القطعة المستقيمة المرسومة بين ....

ب المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًّا على أى وتر فيها ....

جـ خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل يمر ....

د مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع ....

هـ الأوتار المتساوية الطول فى دائرة ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

أ المماس لدائرة طول قطرها ٦سم يكون على بعد .... سم من مركزها.

(٦ أو ١٢ أو ٣ أو ٢)

ب يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(معين أو مستطيل أو شبه منحرف أو متوازى أضلاع)

جـ أب قطر فى الدائرة م، أجـ ، ب ى مماسان للدائرة، فإن أجـ .... ب ى.

(يقطع أو يوازى أو عمودى على أو ينطبق على)

د دائرة محيطها ٦ ط سم، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣سم، فإن المستقيم ل يكون ....

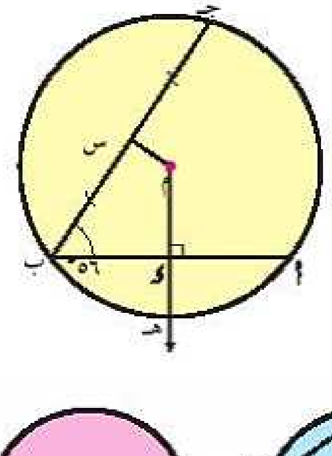
(مماس للدائرة أو قاطع للدائرة أو خارج الدائرة أو قطر للدائرة)

هـ م، ن دائرتان متقاطعتان، طولا نصفى قطريهما ٣سم، ٥سم، فإن: م ن ∈ ....

(]٨، ∞[أو]٢، ∞[أو]٠، ٢[أو]٢، ٨[)

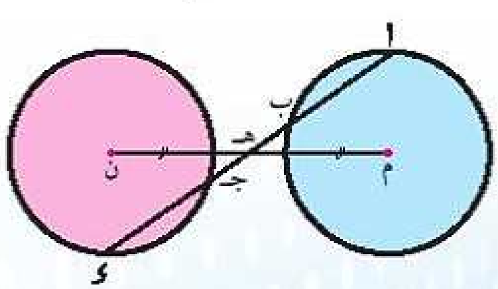
٣ فى الشكل المقابل: أب ، ب جـ وتران فى الدائرة م التى طول نصف قطرها ٥سم، م ى ⊥ أب يقطع أب فى ى ويقطع الدائرة م فى هـ، س منتصف ب جـ. أب = ٨سم، ق(∠ أ ب جـ) = ٥٦°

أوجد: أ ق(∠ ى م س) ب طول ى هـ



٤ فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان، هـ منتصف م ن ، رسم أهـ يقطع الدائرة م فى أ، ب ويقطع الدائرة ن فى جـ، ى.

أثبت أن: أ أب = جـ ى ب هـ منتصف أى .

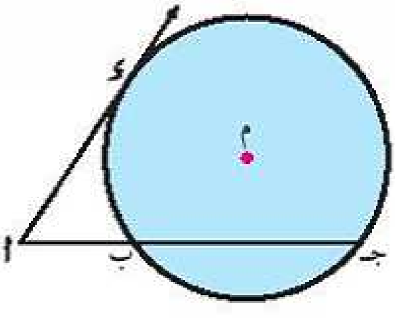


٥ فى الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، أ نقطة خارج الدائرة، أ ء مماس للدائرة م عند ء، أ ب يقطع الدائرة فى ب، جـ على الترتيب حيث أ ب = ٤سم، أ جـ = ١٢سم.

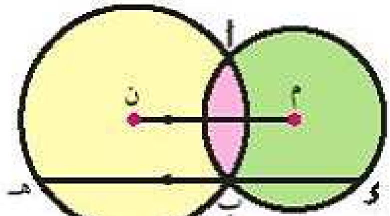
أ) أوجد بعد الوتر ب جـ عن مركز الدائرة.

ب) احسب طول أ ء.



٦ فى الشكل المقابل:

م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، رسم ب ء // م ن ويقطع الدائرتين فى ء، هـ على الترتيب. **أثبت أن:** ء هـ = ٢ م ن.

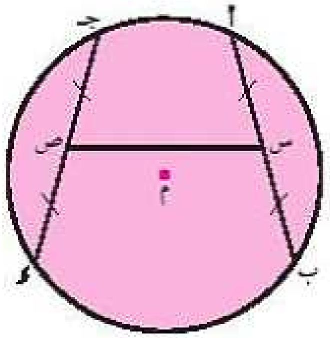


٧ فى الشكل المقابل:

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م، س، ص منتصفا أ ب ، جـ ء بحيث يكون ب، ء فى جهة واحدة من س ص.

أثبت أن: ق (∠ ب س ص) = ق (∠ ء ص س).

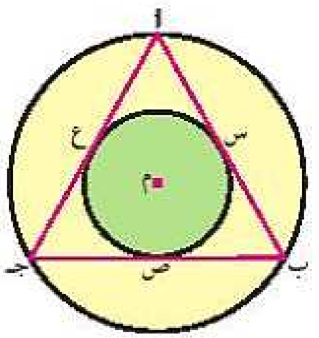
فكر: هل أ جـ // ب ء ؟ فسر إجابتك.



٨ فى الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفى قطريهما ٤سم، ٢سم، رسم المثلث أ ب جـ بحيث تقع رؤوسه على الدائرة الكبرى وتمس أضلاعه الدائرة الصغرى في س، ص، ع.

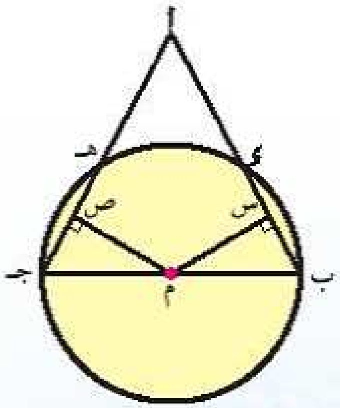
أثبت أن: المثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع وأوجد مساحته.



٩ فى الشكل المقابل:

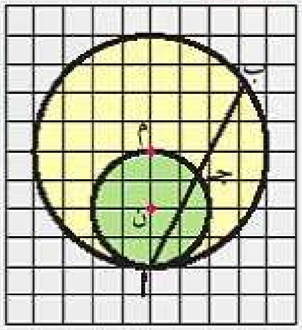
أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، رسمت دائرة م قطرها ب جـ قطعت أ ب فى ء، أ جـ فى هـ، م س ⊥ ب ء ، م ص ⊥ جـ هـ.

أثبت أن: ب ء = جـ هـ.



مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

ملف الإنجاز



١ **فكر وابتكر:** فى مسابقة (فكر وابتكر) قام طالب بتصميم أداة، كما بالشكل المقابل، لتنصيف أى قطعة مستقيمة. ولتنصيف $\overline{أب}$ اتبع الخطوات التالية:

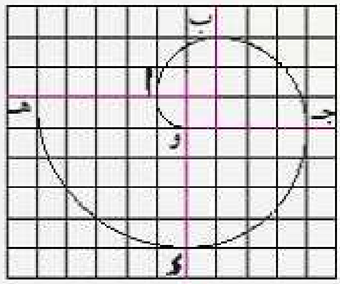
أ **ضع** نقطة تماس الدائرتين على النقطة أ.

ب **حرك** الأداة حتى تنطبق النقطة ب على الدائرة الكبرى.

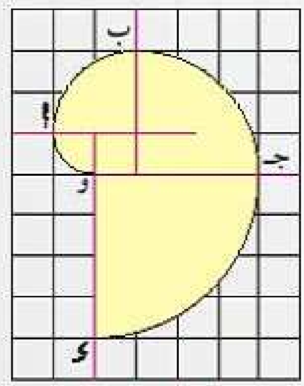
جـ **عين** نقطة تقاطع $\overline{أب}$ مع الدائرة الصغرى ولتكن جـ فتكون النقطة جـ منتصف $\overline{أب}$.

- هل تصميم هذا الطالب صحيح؟ فسر إجابتك.
- ارسم هذه الأداة على ورقة شفافة واستخدمها فى تنصيف عدة قطع مستقيمة. احفظ عملك فى ملف الإنجاز.

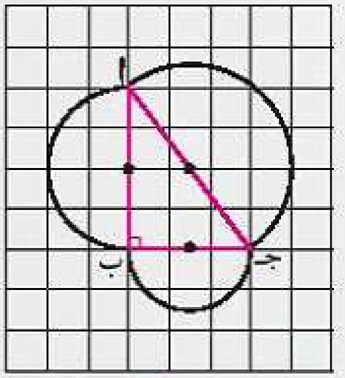
٢ **احسب واستنتج:**



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

فى شكل (١): **احسب** طول المنحنى الحلزونى و أ ب جـ ء هـ.

فى شكل (٢): **احسب** المساحة الملونة.

فى شكل (٣): هل مساحة نصف الدائرة المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع مساحتى نصفى الدائرتين المنشأين على ضلعى القائمة؟ **فسر إجابتك.**

و هل مساحة ربع الدائرة المنشأ على وتر المثلث القائم يساوى مجموع مساحتى ربعى الدائرتين المنشأين على ضلعى القائمة؟ **فسر إجابتك.**

فى المضلعات المنتظمة: هل تكون نظرية فيثاغورث صحيحة؟ سجل ملاحظاتك.

اختبار الوحدة

١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:

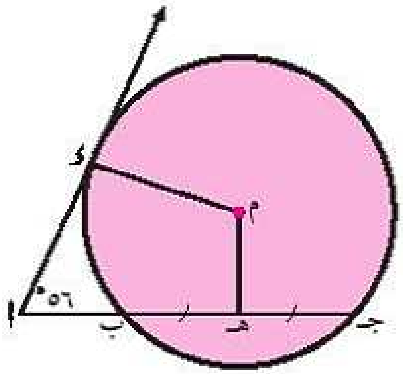
أ أى ثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها ....

ب محور تماثل الدائرتين م، ن المتقاطعتين فى أ، ب هو ....

جـ إذا كان أ ب = ٧سم فإن مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ، ب = ... سم^2.

د إذا كانت م دائرة محيطها ٨ π سم، أ نقطة على الدائرة، فإن م أ = ...

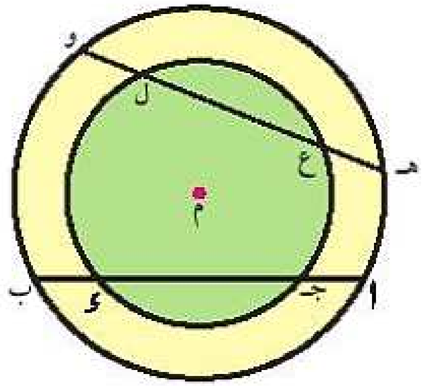
هـ وتر طوله ٨سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم.



٢ فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة م، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ يقطع الدائرة م فى ب، جـ، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ق ($\angle$ أ) = ٥٦°.

أوجد ق ($\angle$ ء م هـ).

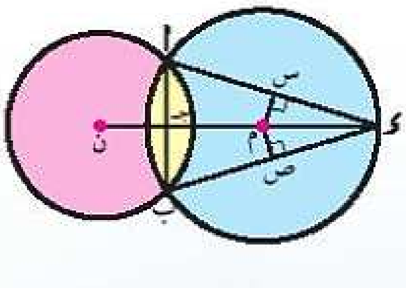


٣ فى الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز م، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى، ويقطع الصغرى فى جـ، ء، هـ و وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى ع، ل حيث أ ب = هـ و.

أثبت أن: **أ** جـ ء = ع ل

ب أ ء = ع و



٤ فى الشكل المقابل:

الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = {أ، ب}، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{م ن}}$ = {جـ}، ء $\in \overleftrightarrow{\text{م ن}}$، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ء}}$، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{ب ء}}$.

أثبت أن: م س = م ص.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الإحصاء

الوحدة السادسة: الإحصاء

مطعم للمثلجات يقدم أنواعًا مختلفة منها. قام صاحب المطعم بعمل استطلاع للرأى عن أنواع المثلجات المفضلة لدى المستهلكين.

ستساعدك دراسة علم الإحصاء فى اختيار عينة ممثلة لمجتمع المستهلكين.

٦ - ١

جمع البيانات

سوف تتعلم

- أنواع مصادر جمع البيانات.
- أساليب جمع البيانات.
- كيفية اختيار عينة.
- أنواع العينات.

المصطلحات الأساسية

- مصادر أولية.
- مصادر ثانوية.
- أسلوب الحصر الشامل.
- أسلوب العينات.
- اختيار متحيز.
- اختيار عشوائي.
- عينة.
- عينة عشوائية.
- عينة طبقية.

فكر وناقش

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التى يعتمد عليها البحث الإحصائى، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمى صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائى واتخاذ القرارات المناسبة.

١ ما مصادر جمع البيانات؟ ٢ كيف يتحدد أسلوب جمع البيانات؟

مصادر جمع البيانات

١ مصادر أولية (مصادر ميدانية):

وهى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر، حيث تجمع البيانات عن طريق المقابلة الشخصية أو الاستبيان (استطلاع الرأى) و يتميز هذا النوع من المصادر بالدقة إلا أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير كما أنها مكلفة من الناحية المادية.

٢ مصادر ثانوية (مصادر تاريخية):

وهى المصادر التى يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء، الإنترنت، وسائل الإعلام.

ويتميز هذا النوع من المصادر بتوفير الوقت والجهد والمال.

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعًا للهدف وحجم المجتمع الإحصائى محل البحث. و يعرف المجتمع الإحصائى بأنه جميع المفردات التى يجمعها خصائص عامة واحدة.

فمثلاً: تلاميذ مدرسة معينة تمثل مجتمعًا إحصائيًّا تكون مفردته التلميذ .

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

أولاً: أسلوب الحصر الشامل:

ويعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع مثل التعداد العام للسكان. ويتميز هذا الأسلوب بالشمول وعدم التحيز ودقة النتائج.

ومن عيوب الحصر الشامل أنه يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة.

ثانيًا: أسلوب العينات:

ويقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الإحصائى الذى تمثله، ونجرى البحث على العينة، وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله.

مزايا أسلوب العينات:

1. توفير الوقت والجهد والتكاليف.
2. الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة (مجتمع الأسماك مثلاً).
3. الأسلوب الوحيد لدراسة بعض المجتمعات المحدودة فى بعض الأحيان مثل:

أ) فحص دم مريض من خلال عينة (لأن فحص الدم كله يؤدى إلى الوفاة).

ب) فحص إنتاج مصنع للمصابيح الكهربية من خلال عينة لتحديد عمر المصباح.

(معرفة العمر الزمنى للمصباح الكهربى يقتضى إشعاله حتى احتراقه).

ومن عيوب أسلوب العينات عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لاتمثل المجتمع تمثيلاً جيدًا (صادقًا)، وتسمى **بالعينة المتحيزة**.

كيفية اختيار العينات والشروط الواجب توافرها فى العينة:

أولاً: الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية)

وهو اختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث، وتعرف بالعينة العمدية، فمثلاً عند دراسة مدى استيعاب التلاميذ لموضوع ما فى مادة الرياضيات، يجب أن نحلل نتائج الاختبار فى ذلك الموضوع لتلاميذ سبق لهم دراسة الموضوع نفسه دون سائر التلاميذ، ولايعتبر هذا الاختيار عشوائيًا.

ثانيًا: الاختيار العشوائى (العينات العشوائية)

وهو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع فيها متساوية.

ومن أهم أنواع العينات العشوائية:

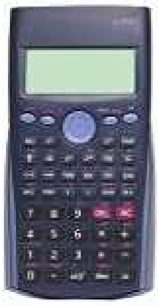
1. العينة العشوائية البسيطة:

هى أبسط أنواع العينات، ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة، ويتوقف اختيارها على حجم، وعدد وحدات المجتمع.

أ إذا كان حجم المجتمع صغيرًا:

عند اختيار عينة من خمسة تلاميذ من فصل به ٤٠ تلميذًا فإنه يمكن إعداد بطاقة لكل تلميذ مكتوبًا عليها اسمه (أو رقمه)، بحيث تكون البطاقات كلها متماثلة، ثم توضع فى صندوق، وتسحب بطاقة من الصندوق عشوائيًا، ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق. وتكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة.

ب إذا كان حجم المجتمع كبيرًا:



بفرض أنه يراد اختيار العينة (٥ تلاميذ) من بين تلاميذ المدرسة كلها والبالغ عددهم ٨٠٠ تلميذ، فتكون عملية الاختيار عن طريق البطاقات عملية شاقة؛ فيتم ترقيم أسماء التلاميذ من ١ إلى ٨٠٠ ، ثم استخدام الآلة الحاسبة (أو برنامج Excel) فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩ ومع إهمال العلامة العشرية ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩، ويمكن تجاهل الأرقام العشوائية التى تزيد على ٨٠٠ كما يلى:

ومع تكرار الضغط على مفتاح = تتوالى ظهور الأرقام ونكتفى بخمسة أرقام غير متكررة لتعطى أرقام تلاميذ العينة.

٢ العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس؛ أى يتكون من مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعًا للصفات المكونة له، وتسمى كل مجموعة بطبقة، ويختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع، وتعرف بالعينة الطبقية.

مثال: عند دراسة المستوى التعليمى لمجتمع ما مكون من ٤٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢، وأردنا اختيار عينة من ٥٠ شخصًا؛ فلابد أن نختار ٣٠ شخصًا من طبقة الذكور، ٢٠ شخصًا من طبقة الإناث، بطريقة عشوائية.

تمارين (٦ ـ ١)

١ **قارن** بين أسلوبى الحصر الشامل والعينات مبينًا مزايا وعيوب كل منهما.

٢ ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بها فى مستوى الخدمة المقدمة لهم، فقامت بإعطاء كل نزيل رقمًا من ٢٠١ إلى ٥٠٠، واختيار ١٠٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة. **حدد** باستخدام آلتك الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة.

٣ إذا كان هناك فى إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ؛ **فاحسب** عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

٦ - ٢

التشتت

سوف تتعلم

- ☆ مقاييس التشتت (المدى – الانحراف المعيارى)

مصطلحات أساسية

- ☆ نزعة مركزية.
- ☆ وسط حسابي.
- ☆ تشتت.
- ☆ مدى.
- ☆ انحراف معياري.

فكر وناقش

سبق لك دراسة مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى، الوسيط، المنوال) وأمكنك حسابها لأية مجموعة من البيانات لتعيين قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات فى التمركز حول هذه القيمة.

فإذا كان الأجر الأسبوعى بالجنيهات لمجموعتين من العمال أ، ب فى أحد المصانع كما يلى:

مجموعة أ: ١٧٠، ١٨٠، ١٨٠، ٢٣٠، ٢٤٠

مجموعة ب: ٥٠، ١٨٠، ١٨٠، ١٩٠، ٤٠٠

(١) **أوجد** الوسط الحسابى لأجور كل من المجموعتين أ، ب.

(٢) **قارن** بين أجور المجموعتين أ، ب. **ماذا تستنتج؟**

تعلم أن: الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

فيكون:

الوسط الحسابى لأجور المجموعة أ = $\frac{١٧٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٢٣٠ + ٢٤٠}{٥}$

$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠$ جنيه

الوسط الحسابى لأجور المجموعة ب = $\frac{٥٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٩٠ + ٤٠٠}{٥}$

$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠$ جنيه

وللمقارنة بين أجور المجموعتين أ، ب نجد أن:

(١) الوسط الحسابى لأجور المجموعة أ = الوسط الحسابى لأجور المجموعة ب = ٢٠٠ جنيه

(٢) الأجر الوسيط = الأجر المنوالى = ١٨٠ جنيهًا لكل من المجموعتين أ، ب.

ويلاحظ أن:

(١) مجموعتى الأجور مختلفتان ولكن لهما نفس مقاييس النزعة المركزية.

(٢) أجور المجموعة أ متقاربة فتنحصر مفرداتها بين ١٧٠، ٢٤٠ جنيهًا، بينما أجور المجموعة ب متباعدة فتنحصر مفرداتها بين ٥٠، ٤٠٠ جنيه.

أى أن أجور المجموعة ب أكثر تشتتًا من أجور المجموعة أ.

لذلك عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم كل من المجموعتين وتباعدها عن بعضها.

التشتت: **لأى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها، ويكون التشتت صغيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً، ويكون التشتت كبيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرًا (أي إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع المفردات.**

أى أن التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مما سبق نستنتج أن:

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر للتشتت لكل مجموعة.

مقاييس التشتت

١ المدى: (أبسط مقاييس التشتت)

وهو الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها فى المجموعة وبمقارنة المجموعتين التاليتين:

المجموعة الأولى: ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٨، ٦٠

المجموعة الثانية: ٤٢، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥٢، ٩٢

نجد أن مدى المجموعة الأولى = ٦٠ - ٥١ = ٩

مدى المجموعة الثانية = ٩٢ - ٤٢ = ٥٠

وعلى هذا نعتبر **المجموعة الثانية أكثر تشتتًا من المجموعة الأولى.**

لاحظ أن:

(١) المدى هو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت.

(٢) يتأثر المدى تأثرًا كبيرًا بالقيم المتطرفة.

فمن الواضح أن مفردات المجموعة الثانية تشتت فى مدى ٥٠، وعند استبعاد المفردة الأخيرة (٩٢) منها فإن **المدى** = ٥٢ - ٤٢ = ١٠ أي $\frac{1}{5}$ المدى السابق حسابه.

(٣) نظرًا لعدم تأثر المدى بأى مفردة فى المجموعة عدا المفردتين الكبرى والصغرى فقد لايعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.

٢ الانحراف المعيارى:

أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها (تحت ظروف خاصة) وهو **"الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى"**.

أى أن:

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$

حيث ترمز: σ (سيجما) إلى الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات.

$\overline{س}$ (سين Bar) إلى الوسط الحسابى لمفردات المجتمع.

ن إلى عدد المفردات.

$\sum$ إلى عملية الجمع.

أولاً: حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات:

مثال

احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية: ١٢، ١٣، ١٦، ١٨، ٢١

الحل

لحساب الانحراف المعيارى نكوّن الجدول المقابل حيث:

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{س} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

$$\therefore \overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$\overline{س} = \frac{١٢ + ١٣ + ١٦ + ١٨ + ٢١}{٥} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{٥٤}{٥}} = \sqrt{١٠,٨} \simeq ٣,٢٨٦$$

س	س - $\overline{س}$	(س - $\overline{س}$)^{٢}
١٢	١٢ - ١٦ = -٤	١٦
١٣	١٣ - ١٦ = -٣	٩
١٦	١٦ - ١٦ = ٠	صفر
١٨	١٨ - ١٦ = ٢	٤
٢١	٢١ - ١٦ = ٥	٢٥
المجموع ٨٠		٥٤

ثانياً: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى:

لأى توزيع تكرارى، يكون:

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2 ك}{\sum ك}}$$

حيث: س تمثل القيمة أو مركز المجموعة ، ك تكرار القيمة أو المجموعة

$\sum$ك مجموع التكرارات ، $\bar{س}$ الوسط الحسابى $= \frac{\sum س ك}{\sum ك}$

مثال ١

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة:

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة.

الحل

باعتبار عدد الوحدات التالفة (س) وعدد الصناديق المناظر لها (ك)

لحساب الانحراف المعيارى للوحدات التالفة نكوّن الجدول التالى:

ويكون:

عدد الوحدات التالفة (س)	عدد الصناديق (ك)	س × ك	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2$ك
صفر	٣	صفر	-٣	٩	٢٧
١	١٦	١٦	-٢	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	-١	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	صفر	صفر	صفر
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
المجموع	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

الوسط الحسابى $\bar{س}$

$$= \frac{\sum س \times ك}{\sum ك}$$

$$= \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$$

الانحراف المعيارى σ

$$= \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2 ك}{\sum ك}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} \simeq ١,٤٢٨ \text{ وحدة}$$

تدرب

التوزيع التكرارى التالى يوضح عدد الأهداف التى سجلت فى عدد من مباريات لكرة القدم:

عدد الأهداف	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد المباريات	١	٤	٦	٩	٥	٣	٢

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الأهداف.

مثال ٢

التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٤٠ تلميذ فى أحد الاختبارات لإحدى المواد:

المجموعات	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٥	١٠	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع.

الحل

(١) نوجد مراكز المجموعات س

فيكون: مركز المجموعة الأولى = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢

مركز المجموعة الثانية = $\frac{٤ + ٨}{٢}$ = ٦

وهكذا ونسجلها فى العمود الثالث.

(٢) نضرب مراكز المجموعات × التكرارات المناظرة لها؛ أي **س × ك** ونسجلها فى العمود الرابع.

نوجد الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك}$

(٣) نوجد انحراف مركز كل مجموعة (س) عن الوسط الحسابى؛ أي نوجد $(س - \overline{س})$

(٤) نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط عن الوسط الحسابى؛ أي $(س - \overline{س})^٢$

(٥) نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابى × تكرار هذه المجموعة؛ أي $(س - \overline{س})^٢ \times ك$

(٦) نحسب الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢ ك}{\sum ك}}$

فيكون:

المجموعات	التكرار (ك)	مراكز المجموعات (س)	س × ك	س - $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2$ ك
-٠	٢	٢	٤	١٠,٦-	١١٢,٣٦	٢٢٤,٧٢
-٤	٥	٦	٣٠	٦,٦-	٤٣,٥٦	٢١٧,٨٠
-٨	٨	١٠	٨٠	٢,٦-	٦,٧٦	٥٤,٠٨
-١٢	١٥	١٤	٢١٠	١,٤	١,٩٦	٢٩,٤٠
١٦-٢٠	١٠	١٨	١٨٠	٥,٤	٢٩,١٦	٢٩١,٦٠
المجموع	٤٠		٥٠٤			٨١٧,٦

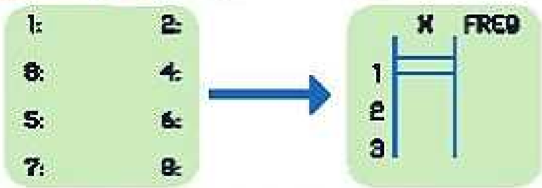
الوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{٥٠٤}{٤٠} = ١٢,٦$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{٨١٧,٦}{٤٠}} = \sqrt{٢٠,٤٤} \simeq ٤,٥٢$ درجة

يمكن استخدام حاسبة الجيب [Fx-82ES, Fx-83ES, Fx-85ES, Fx-300ES, Fx-350ES] فى التحقق من صحة حساب الانحراف المعيارى.

أولاً: تهيئة الحاسبة للنظام الإحصائى والاستعداد لإدخال البيانات

On Mode 2 (Stat) 1 (1–VAR)

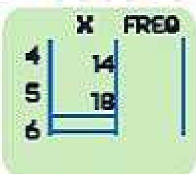


ثانياً: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى (مثال ٢)

١ ندخل مراكز المجموعات ٢، ٦، ١٠، ١٤، ١٨

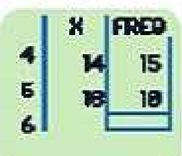
On Mode 2 (Stat) 1 (1–VAR)

2 = 6 = 1 0 = 1 4 = 1 8 =



٢ الانتقال إلى بداية العمود الثانى (FREQ) وإدخال التكرار المناظر لكل مجموعة ٢، ٥، ٨، ١٥، ١٠

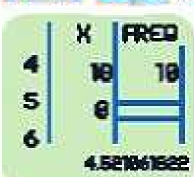
► ▲ 2 = 5 = 8 = 1 5 = 1 0 =



٣ استدعاء الناتج (الانحراف المعيارى)

Shift 1 5 (VAR) 3 (Xσn) = ▲

فيكون $\sigma \simeq ٤,٥٢١$



٤ العودة للنظام الأصلى وإغلاق الحاسبة

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

لاحظ أن:

(١) يتأثر الانحراف المعيارى بانحرافات جميع القيم، وبالتالى تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة.

(٢) الانحراف المعيارى له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية، ولذلك يستخدم فى المقارنة بين تشتت المجموعات التى لها نفس وحدات القياس عند تساويها فى الوسط الحسابى، وتكون المجموعة الأكبر فى الانحراف المعيارى هى الأكثر تشتتًا.

تدرب

الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع درجات تلاميذ الفصلين أ، ب فى الصف الثالث الإعدادى فى أحد الاختبارات:

فصل أ

مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

فصل ب

مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٣	١٨	٧	١٠	٤٠

(١) **مثل** كلاً من التوزيعين بالمضلع التكرارى على شكل واحد.

(٢) **أوجد** الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من التوزيعين التكراريين.

(٣) **أى** الفصلين أكثر تجانسًا فى مستوى التحصيل؟

تمارين (٦ ـ ٢)

(١) **احسب** الانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية:

أ ١٦، ٣٢، ٥، ٢٠، ٢٧

ب ٧٢، ٥٣، ٦١، ٧٠، ٥٩

جـ ١٥، -١٢، -٩، ٢٧، -٦

د ٢٢، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ١٨

(٢) إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات = صفرًا، **فماذا** تستنتج؟

(٣) التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال.

٤ التوزيع التكرارى التالى يبين أوزان ٢٠٠ تلميذ فى إحدى المدارس:

الوزن بالكيلو جرام	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-٨٥	المجموع
عدد التلاميذ	٢٠	٥٥	٨٠	٣٠	١٥	٢٠٠

أوجد: أ الوسط الحسابى لأوزان التلاميذ.   ب الانحراف المعيارى لأوزان التلاميذ.

تمارين عامة على الوحدة

١ **اذكر** الأسلوب المناسب لجمع البيانات فى كل من:

أ معرفة نوعية القمح قبل شرائه.

ب معرفة درجة ملوحة مياه البحر.

جـ معرفة صلاحية أسطوانات الغاز قبل توزيعها.

٢ يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة، ومقسم إلى ثلاث طبقات بيانها كالتالى:

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة ٢٤٠ مفردة؛ **أوجد** حجم العينة كلها.

٣ **احسب** الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات التالية:

٢٣، ١٢، ١٧، ١٣، ١٥، ١٦، ٨، ٩، ٣٧، ١٠.

٤ فيمايلى توزيع تكرارى يبين أعمار ١٠ أطفال:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات.

٥ التوزيع التكرارى التالى يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات:

عدد الكيلو مترات لكل لتر	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-١٧	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١٠	١٢	٥	٤	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلو مترات لكل لتر.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الربط بالتكنولوجيا

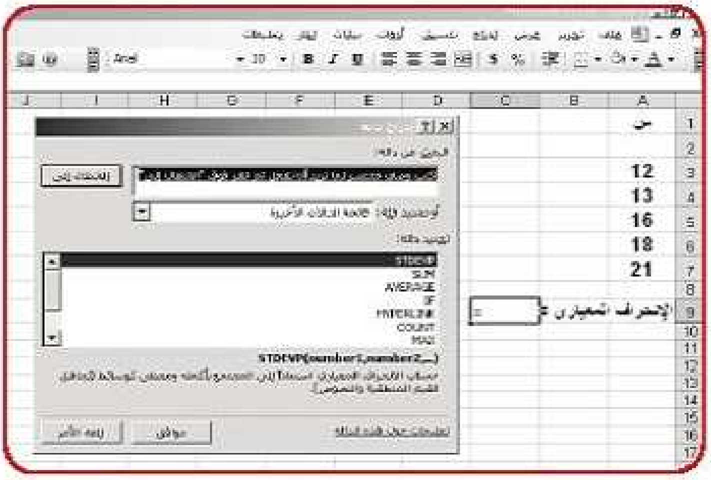
استخدام برامج الحاسب الآلى لحساب الانحراف المعيارى.

ابدأ: ابدأ (**Start**) ثم برامج (**programs**) ثم الجداول الإلكترونية (**Excel**) فتظهر الشاشة التالية:

١

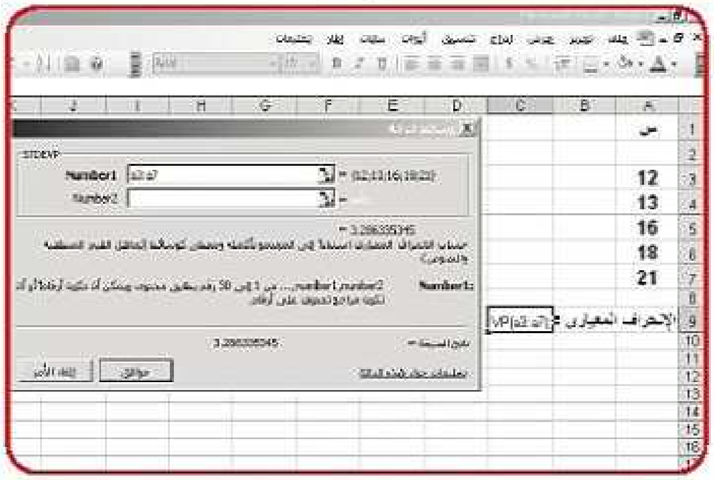
- أدخل بيانات مثال (١) فى المدى ($A3$, $A7$) كما بالشكل
- من قائمة إدراج (**insert**)، اختر دالة ($\mathcal{F}_x$) ثم إدخال

٢



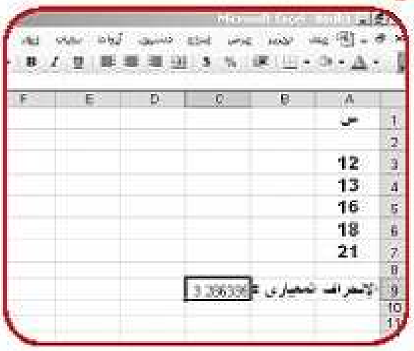
- من مربع حوار البحث عن دالة ، اختر الدالة **STDEVP** ثم إدخال

٣



- لحساب الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات حدد نطاق المتغير ($A3$, $A7$) ثم إدخال

٤



- لاحظ أن الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات = ٣,٢٨٦٣٣٥ وهو نفس الناتج السابق حسابه فى مثال (١) باستخدام الحاسبة.

ملف الإنجاز

(١) باستخدام أسلوب العينات اختر عينة عشوائية من زملائك بالفصل حجمها ١٠ مفردات ثم قس أطوالهم بالسنتيمترات، واحسب متوسط طول زملائك بالفصل. **قارن** بين النتائج التى حصلت عليها والنتائج الأخرى التى حصل عليها زملاؤك. فسر إجابتك.

(٢) الجدول المقابل يبين درجات الحرارة على بعض المدن.

(أ) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة العظمى.

(ب) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة الصغرى.

(يمكنك تتبع النشرة الجوية اليومية وحساب الإنحراف المعيارى لها، والاحتفاظ بها فى ملف الإنجاز)

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	١١
السويس	٢٦	١٢
العريش	٢٤	١٠
نخل	٢٤	٦
طابا	٢٣	٧
الطور	٢٦	١٦
الغردقة	٢٧	١٥
رفح	٢٦	١١

اختبار الوحدة

(١) **اشرح** بإيجاز العينة العشوائية البسيطة مبينًا كيف يتم اختيارها.

(٢) **احسب** الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية:

(أ) ٦٥، ٦١، ٧٠، ٦٤، ٧٠، ٧٦، ٧٠

(ب) ٣٩، ٨٥، ٤٦، ٩١، ٨٨، ٥٠، ٧٧

أى المجموعتين أ، ب أكثر تجانسًا؟

(٣) للتوزيع التكرارى التالى **احسب** الوسط الحسابى والانحراف المعيارى:

المجموعة	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

(٤) قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة مايفضلون تناوله فى فترة الراحة، وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠ ثم اختيار عينة تمثل ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من:

(أ) مشروبات ساخنة (ب) وجبات خفيفة (جـ) مثلجات

حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة.

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة

الورقة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ **أكمل ما يأتى:**

أ الجذر التربيعى لمتوسطات مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

ب إذا كان ٢أ = ٣ ب = ٤ جـ فإن أ : ب : جـ = ... : .... : ....

جـ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ... عند س = ١٢

٢ إذا كانت س = ٣، ص = √٢٧ . فأوجد في أبسط صورة قيمة المقدار س^-٢ ص^-٤.

٣ إذا كانت س تتغير عكسيا بتغير مربع ص وكانت س = ١٠٠ عندما ص = ٠,٢.
أوجد قيمة ص عندما س = ٤٠٠.

٤ أ إذا كونت أ، ب، ج، ء تكون تناسبًا متسلسلًا. أثبت أن: $\frac{\text{أ} - \text{ء}}{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{أ} - ٢\text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ} - \text{ب}}$

ب إذا كانت ٥، ٧، ٨، ٩، ٦ تمثل درجات أحد التلاميذ فى شهر ديسمبر للمواد الدراسية.
أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

الورقة الثانية

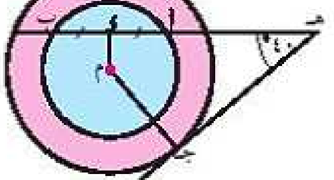
١ **أكمل ما يأتى:**

أ إذا كانت أ (١، ٢)، ب (٣، ٤)، جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ فإن جـ (.........، ....)

ب إذا كان المستقيمان: ٢ س + ب ص + ٣ = ٠، ٣ س - ص + ٢ = ٠ متوازيان فإن ب تساوى ....

جـ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، ٥) و يوازى محور السينات هى ....

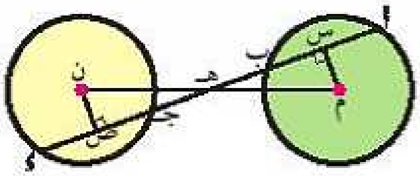
٢ أ **فى الشكل المقابل:**



دائرتان متحدتا المركز م، $\overleftarrow{\text{هـ جـ}}$ مماس للدائرة الكبرى،
$\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ يقطع الدائرة الصغرى فى أ، ب. ء منتصف $\overline{\text{أب}}$،
ق (∠ جـ هـ ء) = ٤٠°. أوجد بالبرهان: ق (∠ ء م جـ).

ب أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على المستقيم ٣ س – ٤ ص + ٧ = ٠
ويقطع من الاتجاه الموجب لمحور الصادات جزءًا مقداره ٦ وحدات.

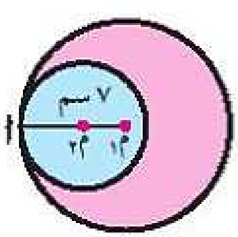
٣ أ في الشكل المقابل:



دائرتان م، ن متطابقتان ومتباعدتان رسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ يقطع الدائرة م في أ، ب ويقطع الدائرة ن في جـ، ء على الترتيب، فإذا كان: $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$، هـ منتصف $\overline{\text{م ن}}$. أثبت أن $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{جـ ء}}$.

ب أثبت أن المثلث الذى رءوسه النقط ص (٤، ٢)، س (٣، ٥)، ع (- ٥، - ١) قائم الزاوية فى ص، ثم أحسب مساحته.

٤ أ في الشكل المقابل:



دائرتان متماستان من الداخل عند أ، مساحة المنطقة المظللة = ٥٥٠ سم٢، م١ م٢ = ٧ سم. أوجد مجموع طولى نصفى قطريهما؟ ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

ب مثل النقاط أ (- ٢، ٤)، ب (٥، - ٣)، جـ (٧، ١)، ء (٠، ٨) بيانيا ثم اثبت أنها رءوس لمتوازى أضلاع.

٥ **أولاً:** أثبت أن: $\frac{\text{ظا } ٣٠° \,(١ - \text{ظا}^٢\, ٣٠°)}{\text{جا } ٣٠° \text{ جتا } ٣٠°}$

ثانيًا: إذا كانت جتا ٣س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق (∠ س) = ...

ثالثًا: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه ١٣ أ ب = ٥ أ جـ. أثبت أن جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = ١.

الورقة الأولى

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١ اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى تسمى بالعينة :

أ العشوائية　ب الطبقية　جـ العمدية　د العنقودية

٢ إذا كان $٦^{س} = ٧$ فإن $٦^{س+١}$ تساوى:

أ ٨　ب ١٣　جـ ٣٦　د ٤٢

٣ الثالث المتناسب للعددين ٩ ، - ١٢ هو :

أ - ١٦　ب ٨　جـ ١٦　د ١٠٨

٤ إذا كان س٢ − ٦ س ص + ٩ ص٢ = ٠ فإن:

أ س ∝ ص　ب س ∝ ص٢　جـ س ∝ $\frac{١}{\text{ص}}$　د س ∝ $\frac{١}{\text{ص}^٢}$

ثانيا:

١ حل المعادلة: $\frac{(١٤)^{٢س} \times ٤^{س+١}}{٤ \times ٧^{س} \times ١٦^{س}} = ٤٩$

٢ أ $٢٥ \times ٣^{س-١} = ٩ \times ٥^{س-١}$، فأوجد قيمة س.

٣ أ إذا كانت س = ل + ٩ وكانت ل ∝ ص فأوجد العلاقة بين ل، ص علماً بأن س = ٢٤، ص = ٥، ثم أوجد قيمة ص عندما ل = ١٢.

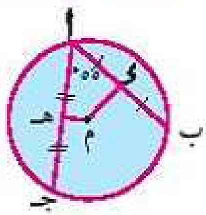
ب إذا كان: $\frac{س+ص}{٧} = \frac{ص+ع}{٥} = \frac{ع+س}{٨}$ أثبت أن $\frac{س+ص+ع}{س-ع} = ٥$

٤ **الجدول التالى يمثل الأجر اليومى لمجموعة من العمال بأحد المصانع:**

فئات الدخل	٣ -	٩ -	١٥ -	٢١ -	٢٧ -	٣٣ - ٣٩
عدد العمال	١٠	١٢	٨	٦	٣	١

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

الورقة الثانية

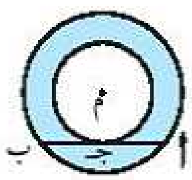


١ أ فى الشكل المقابل: $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران فى الدائرة م
د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$، ق(∠ ب أ جـ) = ٥٥°.
أوجد ق(∠ ء م هـ).

ب أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٥ وحدات وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (-٢، ١)، (٢، ٧).

٢ أ ارسم △ أب جـ الذى فيه أب = ٤ سم ، ق(∠ ب أ جـ) = ٥٨° داخل دائرة طول نصف قطرها ٢,٥ سم، ثم أوجد بالبرهان بعد مركزها عن $\overline{أب}$.

ب على مستوى إحداثى متعامد مثل كلا من النقط أ (- ١، ٥) ، ب (٤، ٠) ، جـ (٥، ٦).
ارسم △ أب جـ وأثبت أنه متساوى الساقين. أوجد هـ منتصف $\overline{أب}$ ، ثم اثبت أن $\overline{جـ هـ} \perp \overline{أب}$.



٣ **فى الشكل المقابل:** دائرتان متحدتان فى المركز م،
$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى فى جـ
ومساحة المنطقة المظللة تساوى ١٦ π. أوجد طول $\overline{أب}$.

٤ أ إذا كان جا هـ = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° ظا ٣٠°. فأوجد ق (∠ هـ). حيث هـ زاوية حادة.

ب س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه س ص = ٨ سم، س ع = ١٧ سم، أوجد قيمة:

أولا: ظا س × ظا ع **ثانيا:** جتا س جتا ع - جا س جا ع

إجابات بعض التمارين

إجابات التمارين ص ٤

ثانيًا:

(١) $\frac{١}{٢}$ (٢) ٤ (٣) $\frac{٨}{٢٧}$

(٤) ٢٥ (٥) $\frac{١}{٣}$ (٦) $\frac{١}{٧}$

(٧) $\frac{١}{٨}$ (٨) ١٠٠٠٠ (٩) ٤

ثالثًا:

(٢) (أ) س - ٢ = ٤ ∴ س = ٦

(ب) س - ١ = ٤ ∴ س = ٥

إجابات التمارين ص ٦

ثانيًا:

(١) $(\sqrt{٢})^{٦} = ٨$ (٣) $(-\sqrt{٥})^{٤} = ٢٥$

ثالثًا:

(٢) (أ) $أ^{٢} - ب^{٢} = (٩ - ٤) = ٥$ (ب) $\frac{٩}{٥}$

إجابات التمارين ص ٩

أولًا:

(١) ١ (٢) ١ (٣) $١ = \sqrt{١}$ (٤) -١ (٥) ٢

ثانيًا:

(١) أ (٢) أ (٣) أ (٤) ب

خامسًا:

(١) س = ٥

(٢) س - ٣ = ٠ ∴ س = ٣

(٣) س - ٢ = -٢ ∴ س = ٠

(٤) ٢ س - ١ = ٣ ∴ س = ٢

(٥) س - ٤ = ٢ ∴ س = ٦

(٦) س = ± ٢

إجابات تدريب ص (١٢)

(١) بالتعويض عن قيم كل من م، ر، ن في العلاقة:

جـ = م (١ + ر)ن

∴ جـ = ٢٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٩٨)١٢

جـ = ٢٥٠٠٠ × (١,٠٩٨)١٢

= ٢٥٠٠٠ × ٣,٠٧٠٦٢٤٩١

= ٧٦٧٦٥,٨٥٤٧٧ ≃ ٧٦٧٦٦ جنيه

إجابات التمارين العامة ص (١٤)

(١) ٢ (٢) $\frac{١٠}{٣}$ (٣) $\frac{١٠}{٣١}$

(٤) -١٠ (٥) ٦

ثانيًا:

(١) أ (٢) جـ (٣) د (٤) ب

إجابات اختبار الوحدة ص (١٦)

أولًا:

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (ب)

ثانيًا:

(٤) (أ) س = ١١,٧ (١,٠٢)٣ ≃ ١٢ مليون

(ب) س = ١١,٧ (١,٠٢)-٣ = ١١ مليون

إجابات التمارين ص (١٩)

(٢) $\frac{٢س + ٧}{٣س - ١٢} = \frac{٥}{٣}$

١٥ س - ٦٠ = ٦ س + ٢١

٩ س = ٨١ ∴ س = ٩ العددان: ١٨، ٢٧

(٣) نفرض أن العدد هو س

∴ $\frac{٤٩ - ٣س}{٦٩ - ٣س} = \frac{٢}{٣}$

١٤٧ - ٩ س = ١٣٨ - ٦ س

∴ ٣ س = ٩ ∴ س = ٣

حل تدريب ص (٢٢)

(١) (أ) $\frac{٢}{س} = \frac{٤}{٦}$ س = ٣

(ب) $\frac{٨}{٦} = \frac{ص}{١٢}$ ص = ١٦

إجابات التمارين ص ٢٥

(٣) ٥م + ٧م = ٢٧,٦ ∴ م = ٢,٣

أ = ٥ × ٢,٣ = ١١,٥

ب = ٧ × ٢,٣ = ١٦,١

جـ = ٣ × ٢,٣ = ٦,٩

إجابة تدريب ص (٢٩)

جدول (١) س ص = ٦٠ عكسي

جدول (٢) $\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٩}$ طردي

جدول (٣) $\frac{ص}{س} = \frac{٤}{٩}$ طردي

إجابات التمارين ص (٣٠)

أولًا: (١) (د) (٢) (د) (٣) (جـ)

ثانيًا: (أ) عكسي (ب) ١٢

إجابات التمارين العامة ص (٣١)

(١) (د)

(٥) $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$ ∴ $\frac{٣}{ص} = \frac{٢٦}{٤}$

∴ ص = $\frac{٤ × ٣}{٢٦} = \frac{٦}{١٣}$

إجابات اختبار الوحدة ص (٣٤)

(٣) ٢١ س ع - ص ع = ٧ س ص - ص ع

∴ ٣ س ع = س ص ∴ ٣ ع = ص ∴ ص ∝ ع

(٤) (س٢ ص - ٧)٢ = ٠ ∴ س٢ ص = ٧

∴ ص = $\frac{٧}{س^{٢}}$ ∴ ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

إجابة تدرب ص (٣٥):

(١) (أ) ٧٦,٢٦٦٧ (ب) ٨٥,٦٢٥٦

(جـ) ٨٨,٦٢٥٦ (د) ٦٥,٤٤٥٢

إجابات التمارين ص (٣٧)

(١) (أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$ (هـ) $\frac{٥}{٣}$

(٨) (أ) ظا س + ظا ع = $\frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٦٩}{٦٠}$

(ب) جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب

= $\frac{٥}{١٣} × \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} × \frac{٥}{١٣} = \frac{صفر}{١٦٩}$

= صفر

إجابة تدرب صفحة (٤٢)

(١) ٢٠° (٢) ١٢٠° (٣) صفر (٤) ٥٠° (٥) ٩٠°

إجابات اختبار الوحدة ص (٤٤)

(٤) $\frac{١}{٢}$ (٥) ٢ $\sqrt{٣}$ متر

إجابات التمارين ص (٤٩)

(١) ٥ (٢) ١٢

(٣) ٩ (٤) $\sqrt{١٦ + ٩} = ٥$

(٥) صفر

ثانيًا: (١) جـ (٢) جـ

إجابات التمارين ص (٥٢)

أولًا: (أ) (- ٥ ، ٢)

(ب) أولًا: (٣ ، ٢) ثانيًا: (٠ ، ٧)

(جـ) أولًا: (٠ ، ٤) ثانيًا: (- ، ٦٠)

ثانيًا:

(١) (أ) (٢ ، ٦) (ب) س = ٢ ، ص = - ١٧

(جـ) س = - ١٥ ، ص = ٨,٥ (د) س = ٤ ، ص = ٩

إجابة تدرب صفحة (٥٦)

(٢) (أ) م = -٦,٨٢ ، ١٠ ، ٢٠°

(ب) م = ٤٦,١١ ، ٤١ ، ٤٥°

(جـ) م = ٥٣,٠٢ ، ٣٧ ، ٧٢°

إجابات التمارين ص (٦٠)

أولًا:

(١) $\frac{٢}{٣}$ (٢) -٢

(٣) صفر (٤) ٣

(٥) - ٥ (٦) -$\frac{١}{٣}$

(٧) $\sqrt{٣}$

إجابات التمارين ص (٦٣)

(١) (أ) ص = س + ٢ (ب) ص = - ٣ س + ١٢

(جـ) ص = ٣ س

إجابات اختبار الوحدة ص (٦٦)

(٢) (أ) د (ب) جـ (جـ) د

(د) أ (هـ) أ (و) ب

إجابة تدرب ص (٧٠)

في △ ن جـ م

ن جـ + جـ م > ن أ + أ م

∵ جـ م = أ م

∴ ن جـ > ن أ

إجابة تدرب في صفحة (٧٢)

(أ) ق (أ) = ٩٠° - ٥٠° = ٤٠°

(ب) (م) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

إجابات التمارين (٧٣)

(١) (أ) أ ب = ٢٤سم ، جـ د = ١٠سم

إجابة تدرب صفحة (٧٩)

(١) (أ) ق (∠ م ب) = ٣٥°

(ب) ق (∠ د ب) = ٦٠°

إجابات التمارين (٩٠)

(١) (أ) عدد غير منته (ب) دائرة وحيدة

(٢) دائرتان

(٣) دائرتان

إجابات التمارين العامة ص (٩٩)

(٢) (أ) ٣ (ب) مستطيل

(جـ) يوازي (د) مماس الدائرة

(هـ) [٨ ، ٢]

إجابات التمارين (١٠٦)

(١) نظري

(٢) عملي

إجابات التمارين (١١٣)

(١) (أ) $\overline{س}_١ = ٢٠$ ، $σ_١ ≃ ٩,٣١٧$

(ب) $\overline{س}_٢ = ٦٢$ ، $σ_٢ ≃ ٧,٠٧١$

(ج) $\overline{س}_٣ = ٣$ ، $σ_٣ ≃ ١٠,٣٩٧$

(د) $\overline{س}_٤ = ٢٠$ ، $σ_٤ ≃ ٩,٢٦٥$

مطابع الإعلانات الشرقية - دار الجمهورية للصحافة