النظرية الخاصة للأغلفة الخطية

بحث فى الحلول بين الخطوط المائلة المتوازية ذات الميل ± 1

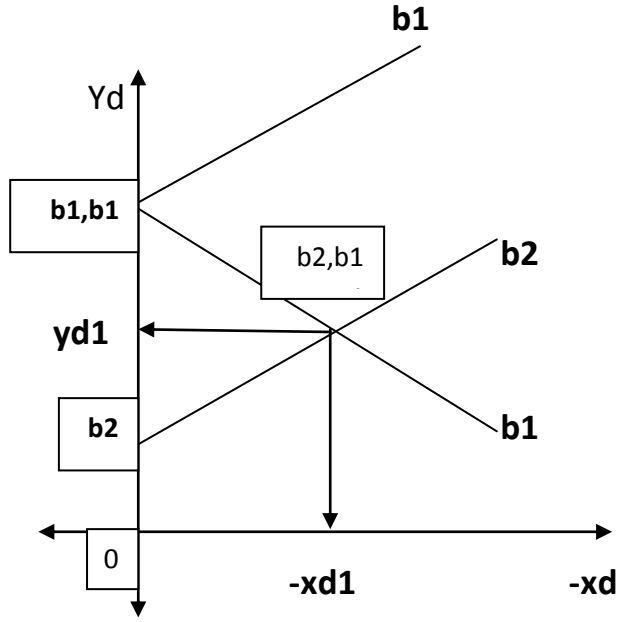
حسين عبد العزيزعبده الحسانين

2025 ميلادية -1447 هجرية

- **المتباينات الغلافية الخطية**

كما تكلمنا عن مصفوفة غلافية سنتكلم هنا عن المتباينة الغلافية ، وكما أن المتباينة بصورة عامة علاقة ترتيبية بين الأعداد ، فهى كذلك فى نظرية الأغلفة ولما كانت الأعداد هنا أعدادا غلافية تعبر عن خطوط متوازية ومائلة ، فإن المتباينة هنا سوف تتم صياغتها من خلال حواف الأغلفة الخطية ومن ثم قلنا عنها متباينات غلافية خطية .

إذا كان لدينا الإحداثى المتعامد للأغلفة التالى :



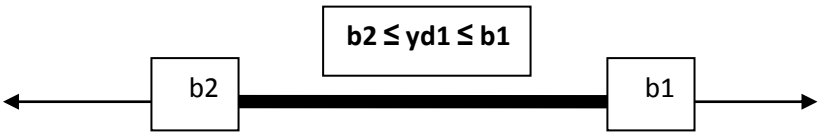
لعل هذا الشكل يساعدنا فى فهم المتباينة الغلافية وذلك من خلال الخطوط المتوازية والمائلة b1,b2 وذات الميل 1+ والخط المائل b1 ذو الميل 1- والذى يصنع من الخط b2 نقطة غلافية (b2,b1),b2<b1 وكذلك يصنع هو الأخر نقطة غلافية أخرى مع الخط المائل b1 ذو الميل 1+ وهذه النقطة الغلافية تقع على المحور الرأسى وهى (b1,b1) والحل للقيم التوانية عند النقطة الغلافية الأولى هو : xd1= (b1-b2)/2 وأيضا yd1=(b1+b2)/2 ولكن عند النقطـــــة الثانية نـــجد أن القيم التـــــوازنية هـــى : 0 = (b1-b1)/2 =xd2 وأيضا b1 =yd2= (b1+b1)/2=2b1/2 وهذا يعنى أن عند النقطة الأولى دائما : b2<yd1<b1 وعند النقطة الثانية دائما : yd2=b1 ولكن متى yd1= b1 ؟ بديهى عندما b2=b1 يعنى عندما ينتقل الخط b2b2 إنتقالا موازيا لأعلى حتى ينطبق على الخط b1b1 ذو الميل 1+ وبالمثل متى yd1=b2 ؟ بديهى عندما b1=b2 يعنى عندما ينتقل الخط b1b1 ذو الميل 1-

إنتقالا موازيا لأسفل وحتى b1=b2 ، وهذا يعنى أن القيمة التوازنية yd1 قد تكون أكبر من أو تساوى b2 وأقل من أو تساوى b1 أى أن :

$$b2 \leq yd1 \leq b1$$

وهذا ما نطلق عليه متباينة غلافية أى أن القيمة التوازنية على المحور الرأسى فترة مغلقة دائما بين عنصرى النقطة الغلافية محل البحث .

أى إذا مثلنا عنصرى النقطة الغلافية على خط الأعداد لأمكننا تمثيل المتباينة الغلافية كفترة مغلقة دائما بين عنصرى النقطة الغلافية كالشكل التالى :



ويجب أن نلاحظ أن الجملة الرياضية $x \geq a, a \epsilon z$ لإن الجملة تعتبر صحيحة حيث قد تكون x أكبر من a أو x تساوى a ولكن لا يمكن أن يتحقق الأمران معا فيجب أن يكون أحد الأمرين صحيحا على الأقل لصحة الجملة آنفة الذكر ، وكذلك الأمر بالنسبة $x \leq a$ ، ولكن عندما نقول الجملة الرياضية التالية : $a \leq x \leq a$ طالما أن الأمران لا يمكن أن يتحققان معا كما أوضحنا فإن x لا يمكن أن تكون أكبر من a وفى ذات الوقت أقل منها ولذا فإن الأصوب للجملة كى تكون صحيحة أن تكون x=a وفى هذه الحالة تكون المتباينة $a \leq x \leq a$ جملة صحيحة .

- **خصائص المتباينة الغلافية:**

بالنظر إلى المتباينة الغلافية نجد:

- فإن طـــــرفيها لابد وأن يكونا متساويين فإما أن تكون yd1=b1 حيث b2=b1 أوb2 = yd1 حيث b1 = b2 ولا يمكن حدوثهما معا وهذه من أهم واعظم خصائها ولها دول كبير فى حل المتباينة الغلافية والحصول على القيم التوازنية منها .
- يمكن تحويل المتباينة الغلافية لنقطة غلافية والعكس ، فالنقطة الغلافية $a \leq b$, $(a,b), b \geq a$ تحول لمتباينة غلافية حيث $a \leq yd \leq b$ وصيغة المتباينة الأخيرة تحول لنقطة غلافية كالنقطة التى أخذت منها مع مراعاة أن العنصر الثانى أكبر من العنصر الأول أو يساويه أو العنصر الأول أقل من العنصر الثانى أو يساويه .

- **المتباينة الغلافية تتعلق بالقيم التوازنية على المحور الرأسى yd والحصول على القيم التوازنية xd من المتباينة الغلافية والتى تساوى بين طرفى المتباينة ويتم إستخدامها للحصول على القيم التوازنية yd.**
- **المتباينة الغلافية لها صفة الخطية وذلك لأن درجة متغيرتها من الدرجة الأولى .**
- **وإذا كانت النقطة الغلافية تتكون من تقاطع خطين مع بعضهما ، ولا وجود للنقطة للخط الواحد أو لا يمكن تكوين نقطة غلافية من عدد غلافى ، كذلك المتباينة شرط ضرورى لوجودها وجود النقطة الغلافية أى أن :**

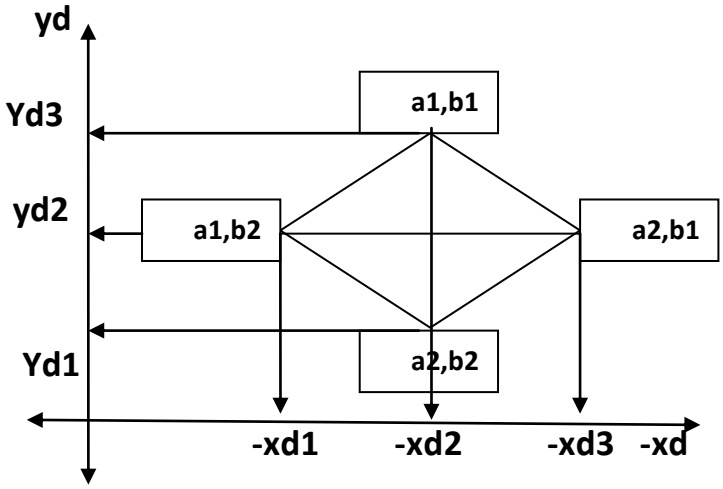
$$(a,b) \longleftrightarrow a \le yd \le b$$

المتباينة الغلافية إذا وإذا فقط النقطة الغلافية .

- **<u>المتباينة الغلافية والقيم التوازنية أو بالأحرى حل المتباينة الغلافية</u>**

بعدما تعرفنا على خصائص المتباينة الغلافية ، نبحث عن إستخدامها فى الحصول على القيم التوازنية عند حواف الأغلفة وإذا كان لكل غلاف أربع حواف وبالتالى أربع نقاط غلافية ومن ثم أربع متباينات ويتم إستخدام ثلاث متباينات منها للحصول على القيم التوازنية <u>حيث كل حافتين متقابلتين تعطى قيم توازنية متساوية وهذا مرتبط بالأغلفة المتعادلة أفقيا ورأسيا .</u>

فإذا كان لدينا الغلاف التوازنى والمرسوم على الإحداثى المتعامد للأغلفة حيث a1>a2,b1>b2 كالتالى :



- **عند الحافة العليا : المتباينة الغلافية a1≤yd3≤b1 .**
- **عند الحافة اليمنى :المتباينة الغلافية a2≤yd2≤b1 .**
- **عند الحافة السفلى :المتباينة الغلافية a2≤yd1≤b2 .**

عند الحافة اليسرى :المتباينة الغلافية $a1 \le yd2 \le b2$.

حيث الحافة اليمنى أو اليسرى أيهما تكفى للحصول على القيمة التوازنية yd2 ولذلك نستخدم ثلاث متباينات بدلا من أربعة .

وحيث الحافة العليا أو اليسرى أيهما تكفى للحصول على القيمة التوازنية xd2 ولذلك نستخدم ثلاث متباينات بدلا من أربعة .

وحل المتباينة الغلافية هو البحث عن قيمة yd التوازنية من خلال القيم التوازنية xd والتى بها تحقق التساوى بين طرفى المتباينة الغلافية .

فإذا كان لدينا النقطة الغلافية $a \le b, b \ge a$ (a,b) وبالتالى لدينا :

$$a \le yd \le b \ldots\ldots 1$$

ولكن من تعريف النقطة الغلافية نجد :

$$Yd2 - xd = a \ldots\ldots\ldots 2$$

ومنها نجد :

$$yd2 = a + xd$$

$$Yd1 + xd = b \ldots\ldots\ldots 3$$

ومنها نجد :

$$yd1 = b - xd$$

ولكن المتباينة فى 1 يمكن إعادة كتابتها :

$$Yd2 \le yd \le yd1 \ldots\ldots 4$$

وذلك عندما $xd = 0$ وبالتالى تكون قيمة yd التوازنية عندما تكون $yd1\text{-}yd2 = 0$ أى أن : $yd1 = yd2$ وبالتالى يمكن إعادة كتابة المتباينة 4 , 1 كالتالى :

$$a+xd \le yd \le b-xd \ldots\ldots 5$$

وبالتالى يكون بحثنا عن قيمة xd التوازنية فى المتباينة 5 والتى تحقق التساوى بين الطرفين بالمتباينة وهى تتحقق عندما :

a+xd = b-xd ومنها نجد أن : xd = (b-a) / 2 وبالتعويض عن xd فى المتباينة 5 نجد أن :

$$a+((b-a)/2)) \le yd \le b-((b-a)/2))$$

ومنها نجد أن :

$$(b+a)/2 \le yd \le (b+a)/2$$

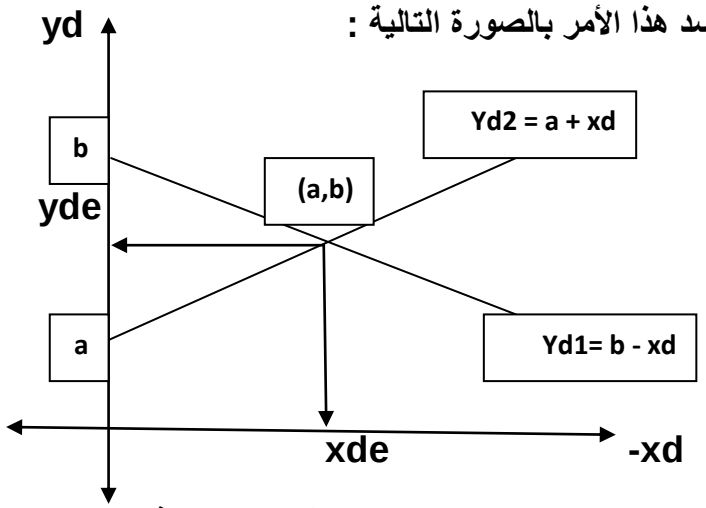
أى أن قيمة yd التوازنية هى :

$$yd = (b+a)/2$$

ويجب أن نلاحظ أن المتباينة 5 تعنى أن قيمة yd التوازنية واقعة بين التغيرات التى تحدث على الخط ذو الميل الموجب 1+ والخط ذو الميل السالب 1- .

وهكذا يمكن عمل ذلك عند كل حافة من حواف الغلاف إيجاد القيم التوازنية عند تلك الحافة ، ويمكن إختصار هذه الخطوات بصورة مباشرة ومن خلال المتباينة رقم 1 حيث نقوم بإضافة xd+ إلى a فى الطرف الأيسر وبطرح xd– من b فى الطرف الأيمن وبمساوات الطرفين نجد xd التوازنية وبالتعويض عنها فى ذات المتباينة نحصل على yd التوازنية .

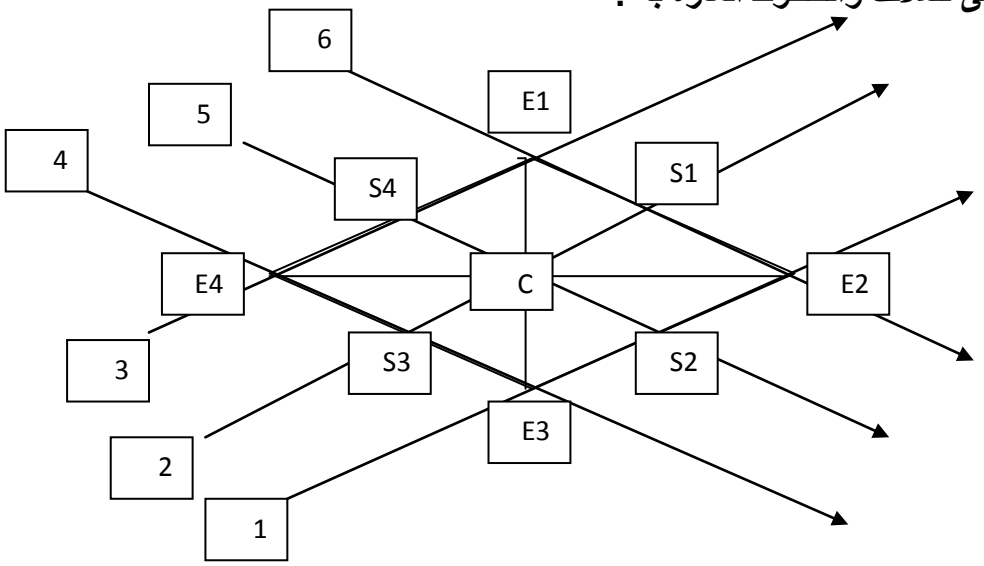
ويمكن من خلال الشكل التالى نجسد هذا الأمر بالصورة التالية :



ومن الشكل نرى القيم التوازنية xde,yde وتقع yde بين الخطين المائلين ذو الميلين ±1

- **الخطوط المائلة المارة بالغلاف ومركزه**

إذا نظرنا للشكل التالى للغلاف والخطوط المارة به :



من الشكل نرى ثلاثة خطوط مائلة ومتوازية وذات ميل 1+ تتقابل مع ثلاثة خطوط أخرى مائلة ومتوازيةوذات ميل 1- ، وهناك الغلاف المتوازن E1E2E3E4 ومركزه C ، وهذا الغلاف يكفى لتحدديه أربعة خطوط فقط وهما الخطان المائلان ذات الميل الموجب 1,3 مع الخطين المائلين ذات الإتجاه السالب 4,6 أما المركز C فيتقاطع عنده الخطان 2,5 .

والخطان 2,5 يقعان فى المنتصف من الخطوط الأخرى كلا فى إتجاهه ، ولذا فإن الخط 5 ينصف ما بين الحواف E1E4 والحواف E2E3 والخط 2 ينصف ما بين الحواف E3E4 والحواف E1E2 ولذلك نراه يمر بالمركز C وبرسم الخطوط المارة بالمركز C تم الحصول على أربع أغلفة داخل الغلاف الكبير E1E2E3E4 ولما كان المركز لا يمر به أكثر من خطين مائلين متقاطعين عند المركز C لذا يمكن صياغة النظرية التالية :

إذا كان هناك أربعة خطوط منهما إثنان مائلين ومتوازيين ذواتا ميل 1+ والأخرين مثلهما ولكن ذواتا ميل ميل 1- ونشأ عنهما غلافا متوازنا فإن الخطان المتقاطعان عن المركز يقسمان الغلاف المتوازن إلى أربع أغلفة متوازنة تشترك جميعها عند مركز الغلاف المتوازن.

ونتيجة يمكن أن تنبثق من هذه النظرية وهى كالتالى :

كل غلاف متوازن يتم الحصول عليه من أربعة خطوط مائلة ومتوزاية إثنان ذواتا ميل 1+ والأخرين ذواتا ميل 1- فإن هناك أربع نقاط للتلاقى بين هذه الخطوط ، وإذا تم تقسيم هذا

الغلاف المتوازن إلى أربع أغلفة فيتم الحصول على أربع نقاط أخرى للتلاقى تقع على أنصاف أضلاع الغلاف المتوازن .

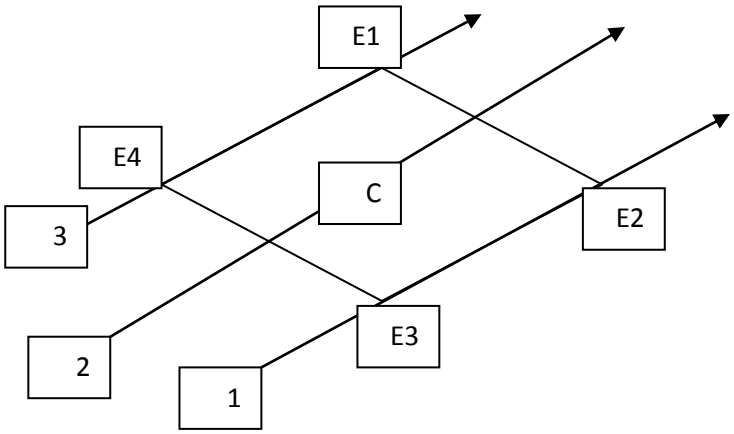
ففى الشكل أعلاه الغلاف المتوازن E1E2E3E4 به أربع نقاط للتلاقى عند كل حافة من حوافه ، ولكن عندما تم رسم المتقاطعين عن مركزه تم الحصول على أربع نقط أخرى للتلاقى عند S1,S2,S3,S4 وهى موجودة عند منتصف أضلاع الغلاف المتوازن

- **عدد الخطوط المائلة والمتوازية المارة بحواف الغلاف ومركزه**

يمكن صياغة النظرية التالية :

لا يمر أكثر من ثلاثة خطوط مائلة ومتوازية وذات إتجاه واحد بحواف الغلاف ومركزه .

إذا كان لدينا الغلاف E1E2E3E4 ومركزه C التالى :



فلا يوجد أكثر من ثلاثة خطوط متوازية ومائلة وذات إتجاه واحد يمكن ان يمر برؤوس الغلاف مركزه ، وهذه الخطوط هى 1,2,3 ويمكن إثبات ذلك كالتالى :

إذا كان للغلاف أربع حواف فإن كل حافتين تشتركان معا فى خط واحد ولا يمر بمركزه أكثر من خط واحد له ميل وإتجاه الخطين الأخرين ، وهذا الإثبات يمكن جعله كنتيجة للنظرية بعاليه.

ويمكن الإثبات بطريقة جبرية كالتالى :

معادلة الخط 1 هى: a1=y1+x

معادلة الخط 2 هى : a2=y2+x

معادلة الخط 3 هى: a3=y3+x

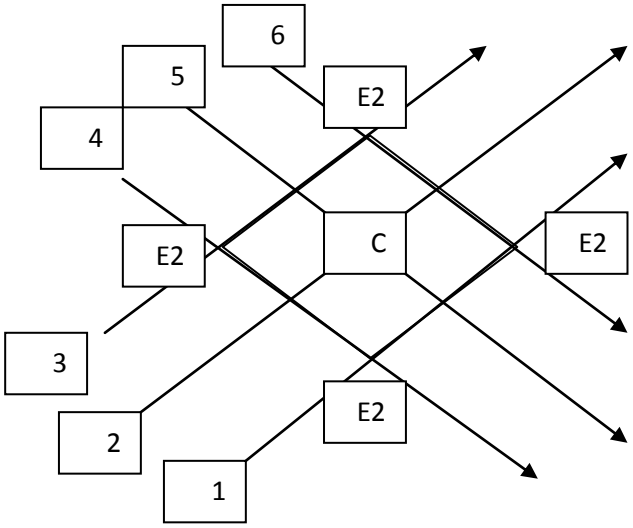
ونلاحظ أن a1 تتكرر عند E3,E2 وa2 لا تتكر إلا عند C وa3 تتكرر عند E4,E3 ومعنى هذا التكرار أن خطا واحدا يمر بحافتين مرة واحدة وبالتالى تكون هناك ثلاث قيم مختلفة للحد المطلق بمعادلة كل خط وهى a1,a2,a3 وبالتالى لا يوجد سوى ثلاثة خطوط تمر برؤوس الغلاف ومركز شريطة أن يكونا ذا مائلة ومتوازية وذات إتجاه واحد .

- **عدد الخطوط المارة بحواف الغلاف المتوازن ومركزه**

لا يمر أكثر من ستة خطوط مائلة ومتوازية برؤوس الغلاف المتوازن نصفها ذات ميل +1 والنصف الأخر ذا ميل -1 .

ويمكن من خلال الشكل التالى تبيان ذلك :

لدينا الغلاف المتوازن E1E2E3E4 ومركزهC وعدد من الخطوط المائلة والمتوازية نصفها ميله +1 والنصف الأخر ميلها -1 وهو كالتالى :



ومن الرسم يمكن رؤية بوضح عدد الخطوط الستة من الخط رقم 1 إلى الخط رقم 6 الخطوط 1,2,3 ذات ميل +1 والخطوط 4,5,6 ذات ميل -1 وكذلك جبريا يمكن الحصول على ستة قيم مختلفة كقيم للحد المطلق بمعادلة كل خط عن كل حافة من حواف الغلاف المتوازن ومركزه .