حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

حل معادلة الدرجة الثانية

المعادلة العامة التربيعية تسمى معادلة الدرجة الثانية أو معادلة القطع المكافئ حيث أنها تمثل بيانيا بقطع مخروطى له فرعان متكافئان

الصورة العامة للمعادلة :

ﺃ س + ب س + جـ = صفر

$\forall$ ﺃ ، ب ،جـ $\in$ ح ﺃ $\neq$ ٠

أى أن أى معادلة على الصورة ﺃس^{م٢} + ب س^{م} +جـ = ٠ تحل على أنها معادلة من الدرجة الثانية ومن أمثلة ذلك :

س^{٨} + ٥ س^{٤} + ٦ = ٠ ، س^{١٠٠} – ٧ س^{٥٠} + ١٢ = ٠ مثل هذه المعادلات تسمى المعادلات الممهدة إلى الدرجة الثانية وهذه المعادلات فى صورتها البسيطة لها حلان فى ح أو ك

إيجاد حل المعادلة التربيعية (جذريها)

معادلة الدرجة الثانية تحل بطريقتين وهما :

الطريقة الجبرية

معادلة الدرجة الثانية تحل بطريقتين جبريا

١) **بالتحليل** : إذا كانت جذورها أعداد نسبية

٢) **بالقانون** : إذا كانت جذورها أعداد غير نسبية

وهذا القانون توصل إليه العالم الهندى براهما جويتا وكان يوجد حل وحيد للمعادلة وهو

المعادلة ﺃ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ لها جذران هما

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ﺃجـ}}{٢ﺃ}$$

ومن الملاحظ أن إستخدام القانون لا ينطبق فقط على المعادلات التى جذورها أعداد غير نسبية ولكن يمكن إستخدام القانون فى أى حالة من حالات معادلة الدرجة الثانية

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كانت المعادلة ﺃ س^{٢} + ب س +جـ = ٠ لها جذرين حقيقين وهما ل ، م فإن :

(س – ل) ، (س – م) تسمى عواملها

(٢) إذا كان (س+ك) عامل من عوامل المعادلة التربيعية فإن س = –ك يكون أحد جذورها

وكذلك إذا كان :

☹ س= $\frac{ك}{ل}$ أحد جذورها فإن (ل س – ك) أحد عواملها

☹ ى س – ك عامل فإن س = $\frac{ك}{ى}$ جذر لها

(٣) إذا كان س = ل أحد جذور المعادلة فإنه يحقق المعادلة

مثال ١ : أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية :

(١) س^{٢} + س = ٠ (٢) س^{٢} + ١٦ = ٠

(٣) ٤س^{٢} – ٩ = ٠ (٤) س^{٢} – ٥ س+ ٦ = ٠

(٥) س + $\frac{٥}{س}$ = ٤ (٦) $\frac{٦}{س}$ – س = $\frac{٥}{٢}$ $\forall$ س $\neq$ ٠

الحـــــــــل

(١) س^{٢} + س = ٠ يتم تحليل المقدار

س(س + ١) = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠ ، س = –١

$\therefore$ م ح = { ٠ ، –١ }

(٢) س^{٢} + ١٦ = ٠ معادلة تربيعية حدية

س^{٢} = – ١٦ $\Leftarrow$ س = ± $\sqrt{-١٦}$ $\notin$ ح

م ح = ϕ

(٣) ٤س^{٢} – ٩ = ٠ معادلة تربيعية حدية

٤ س^{٢} = ٩ $\Leftarrow$ س^{٢} = $\frac{٩}{٤}$ $\Leftarrow$ س = ± $\sqrt{\frac{٩}{٤}}$ = ± $\frac{٣}{٢}$

م ح = { $\frac{٣}{٢}$ ، –$\frac{٣}{٢}$ }

حل أخر :

٤س^{٢} – ٩ = ٠ بتحليل المقدار

(٢ س – ٣) (٢ س + ٣) = ٠

س= $\frac{٣}{٢}$ س = – $\frac{٣}{٢}$ $\Leftarrow$ م ح = { $\frac{٣}{٢}$ ، –$\frac{٣}{٢}$ }

(٤) متروك

(٥) س + $\frac{٥}{س}$ = ٤ بالضرب فى س للمعادلة

س^{٢} + ٥ = ٤ س $\Leftarrow$ س^{٢} – ٤ س + ٥ = ٠

ولا يمكن تحليل المقدار السابق لانه لا يوجد عددين نسبيين ضربهما ٥ وجمعهما ٤

لذا نستخدم القانون لعام لحل المعادلات وهو $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ﺃجـ}}{٢ﺃ}$

ﺃ=١ ، ب = –٤ ، جـ = ٥

المميز ب^{٢} – ٤ ﺃ جـ = (–٤)^{٢} – ٤ × ١ × ٥ = ١٦ – ٢٠

= –٤

$\therefore$ المعادلة ليس لها حل فى ح لماذا ؟

(٦) متروك

مثال٢ : حل المعادلات الأتية :

(١) س^{٢} –١٠ س + ٢٢ = ٠ (٢) س^{٢} – ١٠ س + ٢٣ =٠

(٣) (س– ١١) – س(س– ٦)=٠

(٤) $\frac{س}{س + ١}$ + $\frac{٢}{س - ١}$ = ٣ $\forall$ س $\notin$ { ١ ، –١ }

الحـــــــــل

(١) س^{٢} –١٠ س + ٢٢ = ٠ هذا المقدار لا يمكن تحليله لماذا ؟

ﺃ=١ ، ب = –١٠ ، جـ = ٢٢

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ﺃجـ}}{٢ﺃ}$ أولا نوجد ب^{٢} – ٤ ﺃ جـ

∴ ب^{٢} − ٤ ﺃ ﺟ = (−١٠)^{٢} − ٤ × ١ × ٢٢ = ١٠٠ − ٨٨ = ١٢

$\sqrt{١٢} = \sqrt{٤ × ٣} = ٢\sqrt{٣}$

∴ س = $\frac{١٠ \pm \sqrt{١٢}}{٢ × ١} = \frac{١٠ \pm ٢\sqrt{٣}}{٢}$ = ٥ ± $\sqrt{٣}$

م ح = { ٥ + $\sqrt{٣}$ ، ٥ − $\sqrt{٣}$ }

(٢) بنفسك

(٣) (س − ١١) − س(س − ٦) = ٠

س − ١١ − س^{٢} + ٦ س = ٠ ⟸ − س^{٢} + ٧س − ١١ = ٠

وبالضرب × −١ ⟸ س^{٢} − ٧ س + ١١ = ٠

المعادلة ليس لها تحليل لذا فإن :

ﺃ = ١ ، ب = −٧ ، ﺟ = ١١ ، نوجد ب^{٢} − ٤ ﺃ ﺟ

ب^{٢} − ٤ ﺃ ﺟ = (−٧)^{٢} − ٤ × ١ × ١١ = ٤٩ − ٤٤ = ٥

∴ س = $\frac{٧ \pm \sqrt{٥}}{٢ × ١} = \frac{٧ \pm \sqrt{٥}}{٢}$ ∴ م ح = { $\frac{٧ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، $\frac{٧ - \sqrt{٥}}{٢}$ }

(٤) $\frac{س}{س + ١} + \frac{٢}{س - ١}$ = ٣ بالضرب × (س+١)(س−١)

س(س−١) + ٢(س+١) = ٣ (س+١)(س−١)

س^{٢} − س + ٢ س + ٢ = ٣(س^{٢} − ١)

س^{٢} + س + ٢ = ٣ س^{٢} − ٣

٣س^{٢} − س^{٢} − س − ٢ − ٣ = ٠ ⟸ ٢س^{٢} − س − ٥ = ٠

المعادلة ليس لها تحليل ∴ نستخدم القانون العام لحل المعادلات

ﺃ = ٢ ، ب = −١ ، ﺟ = −٥

أكمل بنفسك

مثال ٣ : أوجد قيمة ﺃ ثم اوجد الجذر الأخر للمعادلة فى كلا مما يأتى :-

(١) إذا كان س = ١ أحد جذرى المعادلة س^{٢} + س − ﺃ = ٠

(٢) س = ٢ أحد جذرى المعادلة ﺃس^{٢} − ٩س + ٢ﺃ = ٠

(٣) س = ٢ أحد جذرى المعادلة ﺃس^{٢} − ٣س + ٢ = ٠

الحـــل

(١) ∵ س = ١ أحد جذورها ∴ س = ١ يحقق المعادلة

س^{٢} + س − ﺃ = ٠ ⟸ (١)^{٢} + (١) − ﺃ = ٠

١ + ١ − ﺃ = ٠ ⟸ ٢ − ﺃ = ٠ ⟸ ﺃ = ٢

(٢) س = ٢ يحقق المعادلة ⟸ ﺃس^{٢} − ٩س + ٢ﺃ = ٠

ﺃ(٢)^{٢} − ٩ × ٢ + ٢ﺃ = ٠ ⟸ ٤ﺃ − ١٨ + ٢ﺃ = ٠

٦ﺃ − ١٨ = ٠ ⟸ ٦ﺃ = ١٨ ⟸ ﺃ = ٣

(٣) متروك للطالب

مثال ٤ : إذا كان ١ ، ٢ هما جذرا المعادلة ﺃس^{٢} + ب س + ٢ = ٠ فأوجد قيمة كلا من ﺃ ، ب

الحـــل

∴ ١ ، ٢ جذرين للمعادلة ∴ فإنهما يحققان المعادلة

عندما س = ١ :-

ﺃ(١)^{٢} + ب(١) + ٢ = ٠ ⟸ ﺃ + ب + ٢ = ٠

⟸ ﺃ + ب = −٢ ـــــــ (١)

عندما س = ٢ :-

ﺃ(٢)^{٢} + ب(٢) + ٢ = ٠ ⟸ ٤ﺃ + ٢ب + ٢ = ٠ ÷ ٢

٢ﺃ + ب + ١ = ٠

⟸ ٢ﺃ + ب = −١ ـــــــ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) أنيا

ﺃ + ب = −٢

٢ﺃ + ب = −١

ﺃ + ٠ = ١ ⟸ ﺃ = ١ وبالتعويض فى (١) عن قيمة ﺃ

ﺃ = ١ ⟸ ﺃ + ب = −٢ ⟸ ١ + ب = −٢

ب = −٢ − ١ = −٣ ⟸ ب = −٣

∴ ﺃ = ١ ، ب = −٣

حل أخر

∵ ١ ، ٢ جذرين للمعادلة لذا فإن عواملها (س−١) ، (س−٢)

أى أن المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

(س−١)(س−٢) = ٠ ⟸ س^{٢} − ٢س − س + ٢ = ٠

س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠ ⟸ بالمقارنة مع ﺃس^{٢} + ب س + ٢ = ٠

∴ ﺃ = ١ ، ب = −٣

مثال٥ : أوجد قيمة ﺃ ، ب فى المعادلة س^{٢} + ﺃ س + ب = ٠ إذا كان جذريها :-

☹ $\sqrt{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$ ☹ $\sqrt{٢}$ + ١ ، $\sqrt{٢}$ − ١

الحـــل

☹ $\sqrt{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$ جذور للمعادلة ∴ تحققها

عندما س = $\sqrt{٣}$:-

($\sqrt{٣}$)^{٢} + ﺃ($\sqrt{٣}$) + ب = ٠ ⟸ ٣ + $\sqrt{٣}$ ﺃ + ب = ٠

ب + $\sqrt{٣}$ ﺃ = −٣ ـــــــ (١)

عندما س = −$\sqrt{٣}$:-

(−$\sqrt{٣}$)^{٢} + ﺃ(−$\sqrt{٣}$) + ب = ٠ ⟸ ٣ − $\sqrt{٣}$ ﺃ + ب = ٠

ب − $\sqrt{٣}$ ﺃ = −٣ ـــــــ (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) أنياً

ب + $\sqrt{٣}$ ﺃ = −٣

ب − $\sqrt{٣}$ ﺃ = −٣ بالجمع

٢ب + ٠ = −٦ ⟸ ب = −٣ وبالتعويض فى (١)

ب + $\sqrt{٣}$ ﺃ = −٣ ⟸ −٣ + $\sqrt{٣}$ﺃ = −٣ ⟸

$\sqrt{٣}$ ﺃ = ٠ ⟸ ﺃ = ٠

∴ ﺃ = ٠ ، ب = −٣

حل أخر :

$\sqrt{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$ جذور للمعادلة ∴ يمكن كتابة المعادلة على الصورة : (س + $\sqrt{٣}$)(س − $\sqrt{٣}$) = ٠

س^{٢} − ٣ = ٠ وبالمقارنة مع س^{٢} + ﺃ س + ب = ٠

ﺃ = ٠ ، ب = −٣

☹ $\sqrt{٢}$ + ١ ، $\sqrt{٢}$ − ١ جذور للمعادلة ∴ فإنها تحققها

عندما س = $\sqrt{٢}$ + ١

($\sqrt{٢}$ + ١)^{٢} + ﺃ ($\sqrt{٢}$ + ١) + ب = ٠

٢ + ٢$\sqrt{٢}$ + ١ + ﺃ ($\sqrt{٢}$ + ١) + ب = ٠

٣ + ٢$\sqrt{٢}$ + ﺃ ($\sqrt{٢}$ + ١) + ب = ٠ ـــــــ (١)

عندما س = $\sqrt{٢}$ − ١

($\sqrt{٢}$ − ١)^{٢} + أ ($\sqrt{٢}$ − ١) + ب = ٠

٢ + ١ − ٢$\sqrt{٢}$ + أ ($\sqrt{٢}$ − ١) + ب = ٠

٣ − ٢$\sqrt{٢}$ + أ ($\sqrt{٢}$ − ١) + ب = ٠ ——— (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً

٣ + ٢$\sqrt{٢}$ + أ ($\sqrt{٢}$ + ١) + ب = ٠

٣ − ٢$\sqrt{٢}$ + أ ($\sqrt{٢}$ − ١) + ب = ٠ بالجمع

٠+ ٤$\sqrt{٢}$ + أ($\cancel{\sqrt{٢}}$ + ١ − $\cancel{\sqrt{٢}}$ + ١) +٠ = ٠

٤$\sqrt{٢}$ + أ × ٢ = ٠ ⟸ ٢ أ = −٤$\sqrt{٢}$ ⟸ أ = −٢$\sqrt{٢}$

∴ أ = −٢$\sqrt{٢}$ بالتعويض فى (١) عن قيمة أ

٣ + ٢$\sqrt{٢}$ + أ ($\sqrt{٢}$ + ١) + ب = ٠

٣ + ٢$\sqrt{٢}$ +(−٢$\sqrt{٢}$) ($\sqrt{٢}$ + ١) + ب = ٠

٣ + ٢$\sqrt{٢}$ − ٢$\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ − ٢$\sqrt{٢}$ × ١ + ب = ٠

٣ + ٢$\sqrt{٢}$ − ٢×٢ − ٢$\sqrt{٢}$ + ب = ٠ ⟸ ٣ − ٤ + ب =٠

⟸ −١ + ب = ٠ ⟸ ب = ١

∴ أ = −٢$\sqrt{٢}$ ، ب = ١

تدريب :

☹ إذا كان ١ ، ٣ جذرا المعادلة أس^{٢} + (ب − ١)س +٣=٠ أوجد قيمتى أ ، ب

☹ إذا كان ٣−$\sqrt{٢}$ ، ٣+$\sqrt{٢}$ هما جذرا المعادلة س^{٢} + أس + ب = ٠ أوجد قيمتى أ ، ب

☹ إذا كان $\sqrt{٥}$ ، −$\sqrt{٥}$ جذرا المعادلة س^{٢} + أس + ب = ٠ أوجد قيمتى أ ، ب

الطريقة البيانية

وهى طريقة يتم فيها رسم منحنى الدالة على الشبكة التربيعية وبالتالى تكون مجموعة حل المعادلة هى نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات وبالتالى فهناك ثلاثة اوضاع لمنحنى الدالة هى كالتالى :

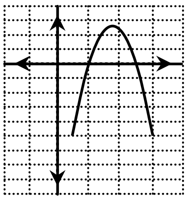
حل معادلة الدرجة الثانية بيانيا

المعادلة التربيعية (معادلة الدرجة الثانية) يكون لها :

⊙ **حلان فى ح :**

إذا كان المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ >٠ (موجب)

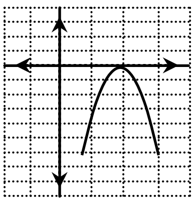
ومنحنى الدالة فى هذه الحالة يقطع المحور س فى نقطتين هما حل المعادلة



⊙ **حل وحيد فى ح :**

إذا كان المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠

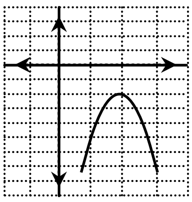
ومنحنى الدالة فى هذه الحالة يمس المحور س فى نقطة واحده وتكون هى الحل



⊙ **ليس لها حل فى ح :**

إذا كان المميز ب^{٢}− ٤ أ جـ <٠ (سالب)

ومنحنى الدالة فى هذه الحالة لا يقطع المحور س فى أى نقطة

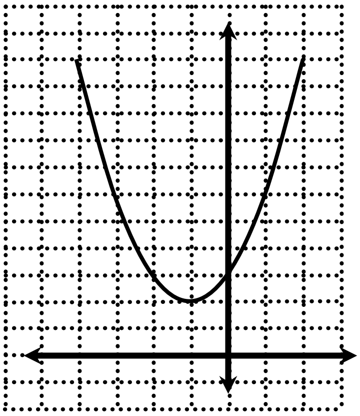


مثال ١: ارسم الشكل البيانى لكلا من الأشكال الأتية ثم حل المعادلة ومن الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى ورأس المنحنى

١) د(س) = س^{٢} + ٢ س + ٣ ∀ س ∈ [−٣ ، ١]

الحل

س	س^{٢}	٢س	٣	ص
−٣	٩	−٦	٣	٦
−٢	٤	−٤	٣	٣
−١	١	−٢	٣	٢
٠	٠	٠	٣	٣
١	١	٢	٣	٦



من الرسم نجد أن المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطة

∴ المعادلة ليس لها حل

⊙ رأس المنحنى (−١ ، ٢)

⊙ الدالة لها قيمة صغرى =٢

⊙ محور التماثل للدالة هو المستقيم س= −١

⊙ مجال الدالة = ح

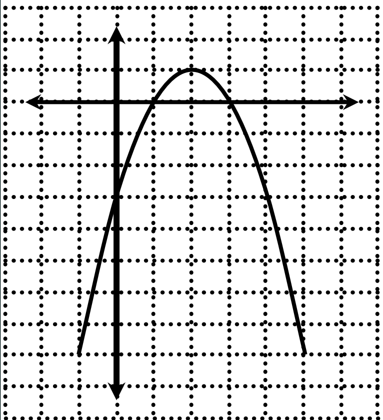
⊙ مدى الدالة = [٢ ، ∞ [

٢) د(س) = ٤ س − س^{٢} −٣ ∀ س ∈ [٠ ، ٤]

الحل

د(س)= − س^{٢} + ٤ س − ٣

س	− س^{٢}	٤س	−٣	ص
٠	٠	٠	−٣	−٣
١	−١	٤	−٣	٠
٢	−٤	٨	−٣	١
٣	−٩	١٢	−٣	٠
٤	−١٦	١٦	−٣	−٣



من الرسم نجد أن : منحنى الدالة يقطع محور السينات فى نقطتين هما { ١ ، ٣ }

⊙ رأس المنحنى (٢ ، ١)

⊙ المنحنى له قيمة عظمى وهو ص = ١

⊙ الدالة لها محور تماثل وهو س = ٢

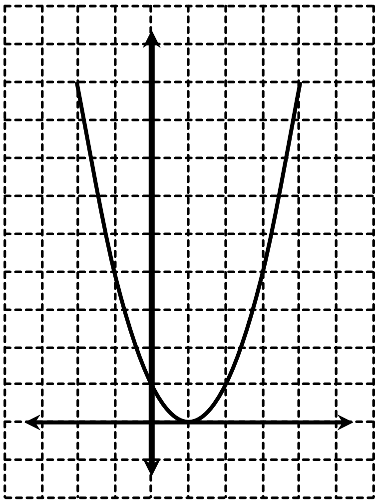
⊙ مجال الدالة = ح

⊙ مدى الدالة =] −∞ ، ١]

٣) د(س) = س^{٢} − ٢ س + ١ ∀ س ∈ [−٢ ، ٤]

الحل

س	س^{٢}	−٢س	١	ص
−٢	٤	٤	١	٩
−١	١	٢	١	٤
٠	٠	٠	١	١
١	١	−٢	١	٠
٢	٤	−٤	١	١
٣	٩	−٦	١	٤
٤	١٦	−٨	١	٩



من الرسم نلاحظ أن : المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة وهو حل المعادلة

م ح = { ١ }

- رأس المنحنى (١، ٠)
- الدالة لها قيمة صغرى وهى ص = ١
- محور التماثل هو المستقيم س = ٠
- مجال الدالة = ح
- مدى الدالة = [٠ ، ∞ [

من السابق نلاحظ أن :

١) المنحنيات فى الأمثلة ١ ، ٢ ، ٣ يمثل دالة لأن أى خط رأسى يرسم فإنه يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة فقط

٢) مجال كلا من الدوال الأتية هو ح وكذلك أى كثيرة حدود فإن مجالها ح

٣) مدى الدالة : هو أول وأخر الدالة على محور الصادات وكلا من مجال ومدى الدالة سيتم التعرف عليهم بشكل دقيق فى الصف الثانى الثانوى

الأعداد المركبة

فى دراستنا لأنظمة الأعداد قد علمنا أن أول نظام اعداد هو نظام أعداد العد ع ثم بعد إكتشاف الصفر تم التوسع وتطبيق نظام الأعداد الطبيعية ثم توالت التوسعات فى أنظة الأعداد وذلك بسبب إحتياجنا لحل المعادلات التى كلما يعجز نظام عن تفسير حل من حلول المعادلات ظهرت الحاجة إلى نظام جديد يستطيع تفسير النتيجة التى وصلنا إليها فى حل المعادلة فتم العمل بنظام الأعداد الصحيحة بعد الطبيعية ثم الأعداد النسبية ن ثم الأعداد الغير نسبية نَ ثم أخيرا الأعداد الحقيقية ح إلى أن حاولنا حل المعادلة الأتية
س^{٢} + ١ = ٠ فأحتجنا إلى توسيع الأنظمة إلى نظام الأعداد المركبة

مجموعة حل المعادلة س^{٢} = −١ في ح تساوي ∅
لانه لا يوجد عدد حقيقى مربعه = −١ ولهذا كانت هناك حاجة لتوسيع مجموعة الاعداد الحقيقية مما أوجد مجموعة جديدة هى مجموعة الاعداد المركبة

العدد التخيلي ت

يعرف العدد التخيلي ت بأنه العدد الذي مربعه يساوي(−١)
أى أن ت^{٢} = −١ ⟸ ت = $\sqrt{-١}$
وتسمي الأعداد علي الصورة ٢ت ، −٥ ت ، و٤ ت بالأعداد التخيلية

أمثلة

١) $\sqrt{-٩}$ = $\sqrt{٩ \times -١}$ = ± ٣ $\sqrt{-١}$ = ± ٣ ت
٢) $\sqrt{-١٦}$ = $\sqrt{١٦ \times -١}$ = ±٤ ت
٣) $\sqrt{-٢٥}$ = $\sqrt{٢٥ \times -١}$ = ± ٥ ت
وهكذا

قوى العدد التخيلي ت الصحيحة

نعرف من السابق أن ت = $\sqrt{-١}$ ، ت^{٢} = −١
ت^{٣} = ت^{٢} × ت = −١ × ت = − ت
ت^{٤} = ت^{٢} × ت^{٢} = −١ × −١ = ١
ت^{٥} = ت^{٤} × ت = ١ × ت = ت

بوجه عام :

ت^{٤ن} = ١ ، ت$^{٤ن+١}$ = ت
ت$^{٤ن+٢}$ = −١ ، ت$^{٤ن+٣}$ = − ت

وللتبسيط نطبق القاعدة الأتية :

١) إذا كان الأس يقبل القسمة على العدد ٤ يكون الناتج =١ سواء كان موجبا او سالبا
٢) إذا كان الأس عدد موجب نطرح منه أكبر عدد يقبل القسمة على ٤ ويكون أقل من الأس
٣) إذا كان الأس عدد سالب نجمع عليه أقل عدد يقبل القسمة على ٤ بحيث يكون اكبر من الأس
ثم بعد ذلك ما يتبقى من الجمع او الطرح يكون أحد الأتى
ت = نفسها ، ت^{٢} = −١ ، ت^{٣} = − ت

ملاحظات مهمة :

١) إذا كان ناتج معين فى إحدى العمليات = ٣ ت^{٢} = ــ٣
أى أن العدد ت^{٢} يغير إشارة العدد مباشرة

٢) إذا كان ناتج معين فى إحدى العمليات هو ٦ت^{٣} = ــ٦ت
أى أن العدد ت^{٣} تغير اشارة المعامل لها وتترك ت بجوار العدد

٣) إذا كان ناتج معين فى إحدى العمليات هو ٥ ت^{٤} = ٥
أى أن العدد ت^{٤} لا يؤثر فى معامله لأنه = ١

مثال ١ : اختصر لأبسط صورة كلا من الأعداد التخيلية الأتية

١) ت^{٤٥} ٢) ت^{٦٢} ٣) ت^{٣١} ٤) ت^{٨٠}
٥) ت$^{-٦٥}$ ٦) ت$^{-٤٩}$ ٧) ت$^{-١٤}$ ٨) ت$^{-١٦}$

الحل

١) ت^{٤٥} الأس عدد موجب لذا نبحث عن أكبر عدد اقل من ٤٥ ويقبل القسمة على ٤ ثم نطرحه من الأس ٤٥ وهذا العدد هو ٤٤
ت$^{٤٥ - ٤٤}$ = ت

٢) ت$^{٦٢ - ٦٠}$ = ت^{٢} = ــ ١
أكبر عدد يقبل القسمه على ٤ وأصغر من ٦٢ هو ٦٠ لذا نطرح ٦٠ من الأس

٣) ت$^{٣١ - ٢٨}$ = ت^{٣} = ــ ت
لأن اكبر عدد يقبل القسمة على ٤ واصغر من ٣١ هو ٢٨ لذا طرحنا من الأس ٢٨

٤) ت^{٨٠} = ١ لأن الأس يقبل القسمة على ٤
٥) ت$^{-٦٥}$ الأس سالب لذا نبحث عن أصغر عدد يقبل القسمة على ٤ ويكون اكبر من ٦٥ وهو ٦٨ لذا نضيف للأس ٦٨
ت$^{-٦٥}$ = ت$^{-٦٥ + ٦٨}$ = ت^{٣} = ــ ت

٦) ت$^{-٤٩}$ أصغر عدد يقبل القسمة على ٤ واكبر من ٤٩ هو ٥٢ لذا نضيف ٥٢ للأس
⟸ ت$^{-٤٩ + ٥٢}$ = ت^{٣} = ــ ت

٧) ت$^{-١٤}$ = ت$^{-١٤ + ١٦}$ = ت^{٢} = ــ ١
٨) ت$^{-١٦}$ = ١ لأن الأس يقبل القسمة على ٤ وإن كان سالبا

مثال ٢ أوجد قيمة كلا مما يأتى فى ابسط صورة

١) ت$^{٤ن + ١٧}$ ٢) ت$^{٤ن + ٣}$ ٣) ت$^{٤ن - ١٥}$

الحل

١) ت$^{٤ن + ١٧}$ العدد ٤ن يقبل القسمة على ٤ مهما كانت ن
∴ ت$^{٤ن + ١٧}$ = ت$^{١٧ - ١٦}$ = ت

٢) ت$^{٤ن + ٣}$ = ت^{٣} = ــ ت

٣) ت$^{٤ن - ١٥}$ = ت$^{-١٥}$ = ت$^{-١٥ + ١٦}$ = ت

العدد المركب

هو ذلك العدد الذى يتركب من عدد حقيقى وأخر تخيلى
ويكون فى الصورة ⟸ أ + ب ت
ويسمى أ بالجزء الحقيقى ويسمى ب بالجزء التخيلى
وذلك علما بأن كلا من العددين أ ، ب أعداد حقيقية
⊙ يقال أن العدد المركب عدد حقيقى صرف إذا كانت ب = ٠
مثل ⟸ ع = ٣ أ، ع = ــ ٤
⊙ يقال أن العدد المركب تخيلى صرف إذا كانت أ = ٠
مثل ⟸ ع = ٣ ت أ، ع = ــ ٥ ت
ويرمز للأعداد المركبة بالرمز ك

مثال ١ : أوجد الأجزاء الحقيقية والأجزاء االتخيلية فى كلا من الأعداد المركبة الأتية

١) ع = ٣ + ٢ ت ٢) ع = ــ٣ + ٥ ت
٣) ع = ٤ ــ ٢ت ٤) ع = ٢ + ت
٥) ع = ٣ ت ٦) ع = ١

الحل

١) ع = ٣ + ٢ ت
الجزء الحقيقى = ٣ ، الجزء التخيلى = ٢

٢) ع = ــ٣ + ٥ ت
الجزء الحقيقى = ــ٣ ، الجزء التخيلى = ٥

٣) ع = ٤ ــ ٢ت
الجزء الحقيقى = ٤ ، الجزء التخيلى = ــ٢

٤) ع = ٢ + ت
الجزء الحقيقى = ٢ ، الجزء التخيلى = ١

٥) ع = ٣ ت
الجزء الحقيقى = ٠ ، الجزء التخيلى = ٣

٦) ع = ١
الجزء الحقيقى = ١ ، الجزء التخيلى = ٠

مثال ٢ : حل كلا من المعادلات الأتية

١) ٩ س^{٢} + ١٢٥ = ٦١ ٢) ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠
٣) ٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠ ٤) ٤ س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥

الحل

١) ٩ س^{٢} + ١٢٥ = ٦١
٩ س^{٢} = ٦١ ــ ١٢٥ = ــ ٦٤ ⟸ ٩ س^{٢} = ــ٦٤
∴ س^{٢} = $\frac{-٦٤}{٩}$ وبأخذ $\sqrt{\quad}$ للطرفين
$\sqrt{س^{٢}}$ = $\sqrt{\frac{-٦٤}{٩}}$ ⟸ س = ± $\frac{٨}{٣}$ ت
م ح = { ± $\frac{٨}{٣}$ ت }

٢) ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠ ⟸
٣ س^{٢} = ــ٢٧ ⟸ س^{٢} = $\frac{-٢٧}{٣}$ = ــ ٩

س^{٢} = - ٩ ⟸ √س^{٢} = √-٩

∴ س = ±٣ ت م ح = { ±٣ ت }

٣) س^{٢} + ٢٤٥ = ٠

....

....

....

....

....

....

....

٤) ٤ س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥

٤س^{٢} = ٧٥ - ١٠٠ = - ٢٥

س^{٢} = $\frac{-٢٥}{٤}$ ⟸ √س^{٢} = √ $\frac{-٢٥}{٤}$

∴ س = ± $\frac{٥}{٢}$ ت ∴ م ح = { ± $\frac{٥}{٢}$ ت }

تساوي عددين مركبين

إذا كان ﺃ + ب ت = ﺠ + ﺩ ت فإن :

⟸ ﺃ = ﺠ ، ب = ﺩ

أى أنه إذا تساوى عددين مركبين فإن

⊙ الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي

⊙ الجزء التخيلى = الجزء التخيلى

إنعدام العدد المركب

إذا كان ﺃ + ب ت = صفر فإن :

⟸ ﺃ = صفر ، ب = صفر

إذا ساوى العدد المركب صفرا فإن :

⊙ الجزء الحقيقي = صفر

⊙ الجزء التخيلى = صفر

أمثلة على ما سبق

مثال ١ : أوجد قيمة س ، ص فيما يأتى

١) (٢س + ١) + ٤ ص ت = ٥ - ١٢ ت

٢) ٢س - ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

٣) ٢س - ص + (س - ٢ ص) ت = ٥ +١٠ ت

الحل

١) (٢س + ١) + ٤ ص ت = ٥ - ١٢ ت

∴ ٢ س + ١ = ٥ ، ٤ ص = -١٢

٢ س = ٥ - ١ = ٤ ،

س = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ص = $\frac{-١٢}{٤}$ = - ٣

٢) ٢س - ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

الحل

٢ س - ٣ = ٧ ، ٣ ص + ١ = ١٠

٢ س = ٧ + ٣ = ١٠ ، ٣ ص = ١٠ - ١ = ٩

س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ ، ص = $\frac{٩}{٣}$ = ٣

٣) ٢ س - ص + (س - ٢ ص) ت = ٥ + ١٠ ت

٢ س - ص = ٥ ، س - ٢ ص = ١٠

وبحل هاتان المعادلتان أنيا وذلك كالتالى :

٢ س - ص = ٥ ——— (١) × ١ × ٢

س - ٢ ص = ١٠ ——— (٢) × ٢ × ١

٢ س - ص = ٥
٢ س - ٤ ص = ٢٠
٠ + ٣ ص = -١٥
∴ ص = $\frac{-١٥}{٣}$ = -٥

٤ س - ٢ ص = ١٠
س - ٢ ص = ١٠
٣ س + ٠ = ٠
س = $\frac{٠}{٣}$ = ٠

مثال ٢ : أوجد قيمة س ، ص فيما يأتى

١) س + ت ص = (٢ + ٣ ت)^{٢}

٢) ٢ س + ٤ ت ص = (٤ - ٢ ت)^{٢}

٣) س + ت ص = (١ + ٢ ت)^{٣}

الحل

١) س + ت ص = (٢ + ٣ ت)^{٢} = ٤ + ٩ ت^{٢} + ١٢ ت

= ٤ - ٩ + ١٢ ت = - ٥ + ١٢ ت

∴ س = - ٥ ، ص = ١٢

٢) ٢ س + ٤ت ص = (٤ - ٢ ت)^{٢} = ١٦ + ٤ ت^{٢} - ١٦ ت

= ١٦ - ٤ - ١٦ ت = ١٢ - ١٦ ت

∴ ٢ س = ١٢ ⟸ س = ٦

∴ ٤ ص = - ١٦ ⟸ ص = - ٤

٣) س + ت ص =(١ + ٢ ت)^{٣} =(١ + ٢ ت)^{٢} (١+٢ ت)

= (١ + ٤ ت + ٤ ت^{٢}) (١ + ٢ ت)

= (١ - ٤ + ٤ ت) (١ + ٢ ت) =

=(-٣ +٤ت) (١ + ٢ ت) = - ٣ - ٦ ت + ٤ ت + ٨ ت^{٢}

= -٣ - ٨ - ٢ ت = - ١١ - ٢ ت

∴ س = - ١١ ، ص = - ٢

العمليات على الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة هى الجمع والطرح والضرب والقسمة وخواصها هى الإنغلاق والإبدال والدمج والمحايد والمعكوس وسنتناول بسرعة هذه العمليات والخواص فيما يأتى :

نفرض أنه لدينا عددان مركبان هما ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$ فإن :

العمليات على الأعداد المركبة تكون كالتالي :

١) ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ + س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ + ص$_{٢}$)

٢) ع$_{١}$ - ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ - س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ - ص$_{٢}$)

٣) ع$_{١}$×ع$_{٢}$ =(س$_{١}$ س$_{٢}$ - ص$_{١}$ ص$_{٢}$) + ت(س$_{١}$ ص$_{٢}$ + س$_{٢}$ ص$_{١}$)

٤) $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = $\frac{س_{١} + ت ص_{١}}{س_{٢} + ت ص_{٢}}$ ويتم ضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام وذلك سيأتى ذكره فى العددان المترافقان

خواص العمليات على الأعداد المركبة :

١) الإنغلاق :

∀ ع١ ، ع٢ ∈ ك فإن :

ع١ + ع٢ ∈ ك ، ع٢ + ع١ ∈ ك

ع١ × ع٢ ∈ ك ، ع٢ × ع١ ∈ ك

٢) الإبدال :

∀ ع١ ، ع٢ ∈ ك فإن :

ع١ + ع٢ = ع٢ + ع١

ع١ × ع٢ = ع٢ × ع١

٣)الدمج (التجميع) :

∀ ع١ ، ع٢ ، ع٣ ∈ ك فإن :

(ع١ + ع٢) + ع٣ = ع١ + (ع٢+ ع٣)

(ع١ ×ع٢) × ع٣ = ع١ × (ع٢ × ع٣)

٤) العنصر المحايد

يوجد عنصر محايد جمعى لأى عدد مركب وهو الصفر

ويوجد عنصر محايد ضربى لأى عدد مركب وهو الواحد

٥) العنصر المعكوس :

⊙ الجمعى : ∀ ع ∈ ك يوجد – ع ∈ ك بحيث :

إذا كان : ع = س + ت ص فإن : – ع = – س – ت ص

⊙ الضربى : ∀ ع ∈ ك يوجد $ع^{-١}$ ∈ ك بحيث :

إذا كان : ع = س + ت ص

فإن : $ع^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ت\,ص}{س^٢ + ص^٢}$

أمثلة

مثال ١ : أوجد قيمة ما يلى فى ابسط صورة

١) (٧ – ٤ ت) + (٢ + ت)

٢) (١٢ – ٥ ت) –(٧ – ٩ ت)

٣) (٢ + ٣ ت) (٣ – ٤ ت)

٤) (٤ – ٣ ت) (٤ + ٣ ت)

٥) (٥ – ٦ ت) (٣ + ٢ ت)

الحل

١) (٧ – ٤ ت) + (٢ + ت) = (٧ + ٢) +(–٤ + ٢) ت

= ٩ – ٢ ت

٢) (١٢ – ٥ ت) –(٧ – ٩ ت) = ١٢ – ٥ ت – ٧ + ٩ ت

= (١٢ – ٧) + (–٥ + ٩) ت = ٥ + ٤ ت

٣) (٢ + ٣ ت) (٣ – ٤ ت) = ٦ – ٨ ت + ٩ ت – ١٢ $ت^٢$

= ٦ + ١٢ + ت = ١٨ + ت

٤) (٤ – ٣ ت) (٤ + ٣ ت)= ١٦ + ~~١٢ت~~ – ~~١٢ت~~ – ٩ $ت^٢$

= ١٦ + ٩ = ٢٥

٥) (٥ – ٦ ت)(٣ + ٢ ت)= ١٥ + ١٠ ت – ١٨ ت – ١٢ $ت^٢$

= ١٥ + ١٢ – ٨ ت = ٢٧ – ٨ ت

مثال ٢ : أوجد قيمة س ، ص فيما يلى :

١) س + ت ص = (٢ + ٣ ت) (١ + ٢ ت)

٢)٢ س + ٤ ت ص = (٤ – ٢ ت) (٤ + ٢ ت)

٣) س + ت ص = (١ + ٢ ت) (١ – ٢ ت) ت

الحل

١) س + ت ص = (٢ + ٣ ت) (١ + ٢ ت)

= (٢ + ٤ ت + ٣ ت + ٦ $ت^٢$) = ٢ – ٦ + ٧ ت

= – ٤ + ٧ ت وهو عدد مركب

∴ س = – ٤ ، ص = ٧

٢) ٢ س + ٤ ت ص = (٤ – ٢ ت) (٤ + ٢ ت)

= ١٦ + ~~٨ت~~ – ~~٨ت~~ – ٤ $ت^٢$

= ١٦ + ٤ = ٢٠ وهو عدد حقيقى صرف

∴ ٢ س = ٢٠ ⟸ س = ١٠

٤ ص = ٠ ⟸ ص = ٠

٣) س + ت ص = (١ + ٢ ت) (١ – ٢ ت) ت

= (١ – ~~٢ت~~ + ~~٢ت~~ – ٤ $ت^٢$) ت

= (١ + ٤) ت = ٥ ت وهو عدد تخيلى صرف

∴ س = ٠ ، ص = ٥

العددان المترافقان

هما العددان المركبان المتشابهان تماما فى الأجزاء الحقيقية والتخيلية ولكنهما يختلفان فى إشارة الجزء التخيلى

فهما على الصورة : ⟸ أ + ب ت ، أ – ب ت

أمثلة على العددان المترافقان :

١) ٢ + ٥ ت ، ٢ – ٥ ت

٢) ٣ + ٤ ت ، ٣ – ٤ ت

٣) –٣ + ٥ ت ، – ٣ – ٥ ت

خواص العددان المترافقان

١) حاصل جمعهما يون عدد حقيقى صرف

٢) حاصل طرحهما يكون عدد تخيلى صرف

٣) حاصل ضربهما دائما عدد حقيقى

فحاصل ضرب العددان أ + ب ت ، أ – ب ت هو كالتالى :

(–٩أ + ب ت) (أ – ب ت) = $أ^٢ + ب^٢$

مثال ١ : أوجد قيمة ما يلى

١) (٣ – ٢ ت) (٣ + ٢ ت) = ٩ + ٤ = ١٣

٢) (–٢ + ٥ ت) (–٢ – ٥ ت) = ٤ + ٢٥ = ٢٩

٣) (٨ + ٣ ت) (٨ – ٣ ت) =

٤) (–٢ + ٧ ت)(–٢ – ٧ ت) =

مثال ٢ : ضع الأعداد الأتية فى الصورة س + ت ص

١) $\frac{١}{٣ - ٢ت}$ ٢) $\frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٤ت}$ ٣) $\frac{٥ت}{٥ - ١٢ت}$

الحل

١) لجعل العدد $\frac{١}{٣ - ٢ت}$ يجب جعل المقام عدد حقيقيصرف أو تخيلي صرف وذلك بضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام

$$\frac{١}{٣ - ٢ت} \times \frac{٣ + ٢ت}{٣ + ٢ت} = \frac{٣ + ٢ت}{٩ + ٤} = \frac{٣ + ٢ت}{١٣} = \frac{٣}{١٣} + \frac{٢}{١٣}ت$$

٢) بضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام

$$\frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت} = \frac{٩ + ١٢ت + ١٢ت + ١٦ت^{٢}}{٩ + ١٦}$$

$$= \frac{٩ + ٢٤ت - ١٦}{٩ + ١٦} = \frac{-٧ + ٢٤ت}{٢٥} = \frac{-٧}{٢٥} + \frac{٢٤}{٢٥}ت$$

٣) $$\frac{٥ت}{٥ - ١٢ت} \times \frac{٥ + ١٢ت}{٥ + ١٢ت} = \frac{٢٥ت + ٦٠ت^{٢}}{٢٥ + ١٤٤} =$$

$$\frac{٢٥ت - ٦٠}{١٦٩} = -\frac{٦٠}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩}ت$$

مثال ٣ : أوجد فى ابسط صورة كلا مما يأتى

١) $\frac{٤ - ٦ت}{٢ت}$ ٢) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت}$

٣) $\frac{٣ - ت}{٢ - ت}$ ٤) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$

الحل

١) $\frac{٤ - ٦ت}{٢ت} = \frac{٤}{٢ت} - \frac{٦ت}{٢ت} = \frac{٤ت^{٤}}{٢ت} - ٣ = ٢ت^{٣} - ٣$

$= -٢ت - ٣$

٢) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت} \times \frac{٣ + ٢ت}{٣ + ٢ت} = \frac{٧٨ + ٥٢ت}{٩ + ٤} = \frac{٧٨ + ٥٢ت}{١٣}$

$= \frac{٧٨}{١٣} + \frac{٥٢}{١٣}ت = ٦ + ٤ت$

٣) $\frac{٣ - ت}{٢ - ت} \times \frac{٢ + ت}{٢ + ت} = \frac{٦ + ٣ت - ٢ت - ت^{٢}}{٤ + ١}$

$= \frac{٦ + ت + ١}{٤ + ١} = \frac{٧ + ت}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}ت$

٤) متروك للطالب

مثال ٤ : أوجد قيمة س ، ص فى كلا مما يأتى

١) $س + ت ص = ٢ت^{-١} + ٤ت^{٢} + ٣ت$

٢) $س + ت ص = \frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٤ت}$

٣) $س + ت ص = (٢ت ٢ت)(٢ + ٢ت)ت$

الحل

١) $س + ت ص = ٢ت^{-١} + ٤ت^{٢} + ٣ت$

$= ٢ت^{-١+٤} + (-٤) + ٣ت = ٢ت^{٣} - ٤ + ٣ت$

$= -٢ت - ٤ + ٣ت = -٤ + ت$

$\Leftarrow$ س = −٤ ، ص = ١

٢) $س + ت ص = \frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٤ت} = \frac{٤ + ١}{٣ + ٤ت} = \frac{٥}{٣ + ٤ت}$

$= \frac{٥}{٣ + ٤ت} \times \frac{٣ - ٤ت}{٣ - ٤ت} = \frac{١٥ - ٢٠ت}{٩ + ١٦} = \frac{١٥ - ٢٠ت}{٢٥}$

$= \frac{١٥}{٢٥} + \frac{-٢٠}{٢٥}ت = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

٣) متروك للطالب

مثال ٥ : أوجد شدة التيار الكلية المارة فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى = ٥ − ٣ ت وشدة التيار فى المقامة الثانية ٢ + ت علما بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المارة فى المقاومتين

الحل

شدة التيار فى المقاومتين = شدة التيار فى المقاومة الأولى + شدة التنيار فى المقاومة الثانية

= ٥ − ٣ ت + ٢+ ت = ٧ − ٢ ت

تداريب :

بحث نوع جذرى المعادلة

المعادلة التربيعية ٲس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ∀ ≠ ٠
دائما لها حلان (جذران) هذان الجذران يكونان :

☹ متشابهين ☹ أعداد نسبية
☹ أعداد غير نسبية ☹ أعداد غير حقيقيه

وهذان الجذران نحصل عليهما من القانون العام لحل المعادلات السـابق ذكره وهو :
المعادلة ٲس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ∀ ≠ ٠ لها جذران هما

س = (– ب ± √(ب^{٢} – ٤ٲ جـ)) ÷ ٢ٲ

ولكن الذى يحدد نوع الجذرين هو ذلك المقدار الموجود تحت الجذر ويسمى المميز وهو ب^{٢} – ٤ ٲ جـ والمميز يصنف أنواع الجذور للمعادلة كالتالى

إذا كان المميز ب^{٢} – ٤ ٲ جـ

(١) موجب > ٠

فى هذه الحالة يكون الجذرين حقيقين مختلفين نسبيين أو غير نسبيين حسب نوع الجذرين فإذا كان :

☹ المميز مربع كامل
يكون الجذرين حقيقيين نسبيين

☹ المميز ليست مربع كامل
يكون الجذرين حقيقيين غير نسبيين

حل المعادلة بيانيا :
منحنى الدالة د(س) = ٲس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ∀ ≠ ٠
يقطع محور السينات فى نقطتين هما جذرا المعادلة

(١) صفراً = ٠

فى هذه الحالة يكون جذرى المعادلة متساويين (متشـابهين أو مكررين) وكلا منهما يسـاوى $\frac{-ب}{٢ٲ}$

حل المعادلة بيانيا :
منحنى الدالة التربيعية يمس محور السينات عند النقطة
($\frac{-ب}{٢ٲ}$ ، ٠)

(١) سالب < ٠

فى هذه الحالة لا يكون للمعادلة أى جذور حقيقية ولكن الجذور تكون أعداد مركبة

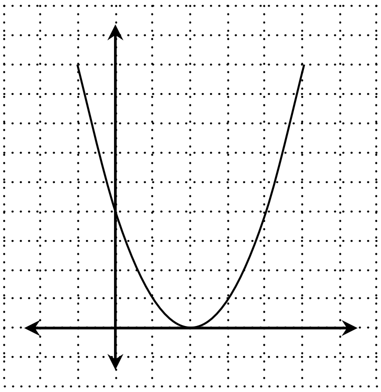
حل المعادلة بيانيا :
لا يقطع منحنى الدالة أى نقط من المحور س

مثال١ : حل المعادلة س^{٢} –٤ س + ٤ = ٠ وتحقق من ذلك جبريا خذ س ∋ [٠ ، ٤]

الحـــــــل
بفرض أن د(س) = س^{٢} –٤ س + ٤

س	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٤	١	٠	١	٤

م٠ح = { ٢ }



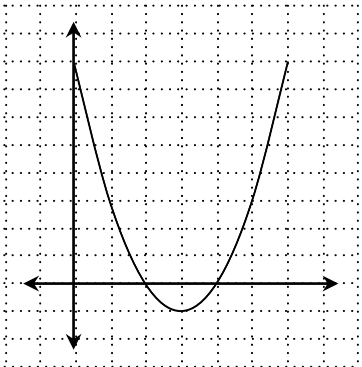
جبريا :
س^{٢}–٤س+٤ = ٠
وبتحليل المقدار السـابق :
(س – ٢)^{٢} = ٠
س – ٢ = ٠
س = ٢
م٠ح = { ٢ }

مثال٢ : حل المعادلة س^{٢} –٦ س + ٨ = ٠ ومن الرسم البيانى أوجد جذرى المعادلة وتحقق من ذلك جبريا خذ س ∋ [١ ، ٥]

الحـــــــل
بفرض أن د(س) = س^{٢} –٦ س + ٨

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٣	٠	١–	٠	٣

م٠ح = { ٢ ، ٤ }



جبريا :
س^{٢} –٦ س + ٨ = ٠
وبتحليل المقدار السـابق :
(س–٢)(س–٤) = ٠
س = ٢ ، س = ٤
م٠ح = { ٢ ، ٤ }

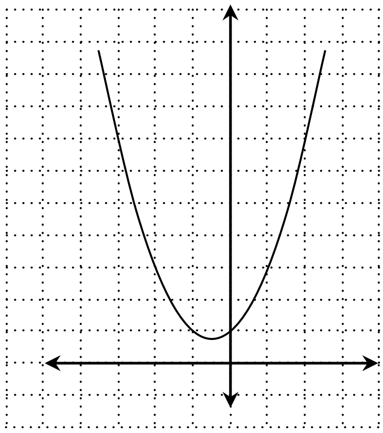
تدريب : حل المعادلة س^{٢} –١٠ س + ٢٥ = ٠ ومن الرسم البيانى أوجد جذرى المعادلة وتحقق من ذلك جبريا خذ س ∋ [١ ، ٩]

مثال٣ : حل المعادلة س^{٢} + س + ١ = ٠ ومن الرسم البيانى أوجد جذرى المعادلة وتحقق جبريا خذ س ∋ [–٣ ، ٢]

الحـــــــل
بفرض أن د(س) = س^{٢} + س + ١

س	–٣	–٢	–١	٠	١	٢
د(س)	٧	٣	١	١	٣	٧

م٠ح = ɸ



لأن المنحنى لا يقطعأى أجزاء من محور السينات

جبريا :

س^{٢} + س + ١ = ٠

المقدار لا يمكن تحليله

لذا نستخدم القانون العام

أ=١ ، ب =١ ، جـ =١

المميز ب^{٢} −٤ أ جـ =

(١)^{٢} − ٤×١×١

= ١ − ٤ = −٣

المعادلة ليس لها حل فى ح

مثال٤ بين نوع كلا من جذرا المعادلات الأتية

(١)س^{٢}−٢س+٥=٠ (٢) س^{٢} + ٩ =٠

(٣) ٣س^{٢} + ١٠س−٥=٠ (٤)٢س^{٢} − س +١ =٠

الحـــل :

(١) س^{٢}−٢س+٥=٠

أ=١ ، ب = −٢ ، جـ = ٥

المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ = (−٢)^{٢} − ٤×١ ×٥

= ٤ − ٢٠ = −١٦

المميز عدد سالب لذا فإن :

مجموعة الحل ⊄ ح

(٢) س^{٢} + ٩ =٠

أ=١ ، ب = ٠ ، جـ = ٩

المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ = (٠)^{٢} − ٤×١ ×٩

= ٠ − ٣٦ = −٣٦

المميز عدد سالب لذا فإن مجموعة الحل ⊄ ح

م٠ح = { ϕ }

(٣) ٣س^{٢} + ١٠س−٥=٠

أ=٣ ، ب = ١٠ ، جـ = −٥

المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ = (١٠)^{٢} − ٤×٣ ×−٥

= ١٠٠ + ٦٠ = ١٦٠

∴ المميز عدد موجب ليست مربع كامل

∴ الجذور أعداد حقيقية غير نسبية

(٤) متروك

مثال ٥ : أوجد قيم م الحقيقية التى تجعل المعادلة

س^{٢} − (٢م−١) س + م^{٢} =٠ ليس لها جذور حقيقية

الحـــل

س^{٢} − (٢م−١) س + م^{٢} =٠

أ=١ ، ب = −(٢م−١) ، جـ = م^{٢}

المعادلة ليس ها حل فى ح ∴ ⟸ المميز < ٠

المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠ ⟸

{−(٢م−١)}^{٢} − ٤ ×١ × م^{٢} = $\cancel{٤م^{٢}}$ +١ −٤م − $\cancel{٤م^{٢}}$ <٠

−٤م+١<٠ ⟸ −٤م < −١ بالقسمة على −٤

م > $\frac{١}{٤}$ ⟸ م =] $\frac{١}{٤}$ ، ∞ [

م٠ح = { س : س ∈ ح ، س > $\frac{١}{٤}$ }

مثال٦ : إذا كان جذرا المعادلة ٢س^{٢} + ه س + ٥ = ٠ متساويين أوجد قيمة ه

الحــــل

أ=٢ ، ب = ه ، جـ = ٥

∵الجذران متساويان ⟸ ∴ المميز = صفر

المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠

ه^{٢} − ٤×٢×٥ = ٠ ⟸ ه^{٢} − ٤٠ = ٠ ⟸ ه^{٢} = ٤٠

ه = ± $\sqrt{٤٠}$ = ± ٢ $\sqrt{١٠}$

مثال ٧: أثبت أنه لجميع قيم أ ، ب الحقيقيتين يكون جذرا المعادلة (س−أ) (س−ب) = ٥ حقيقيين

الحل

(س−أ) (س−ب) = ٥

س^{٢} − ب س − أ س + أ ب − ٥ = ٠

س^{٢} −(ب+أ) س + أ ب − ٥ = ٠

معامل س^{٢}=١ ، معامل س=−(ب+أ) الحد المطلق=أ ب − ٥

ليكون جذرا المعادلة متساويان فإنه لا بد أن يكون المميز عدد موجب

المميز = (معامل س)^{٢} − ٤ × معامل س^{٢} × الحد المطلق

= (−(ب+أ))^{٢} − ٤ × ١ × (أ ب − ٥) =

ب^{٢} + ٢ أ ب + أ^{٢} − ٤ أ ب + ٢٠ = ب^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢}+٢٠

= (ب − أ)^{٢} + ٢٠ وهذا العدد دائما موجب

لذا فإن جذرا المعادلة يكونا حقيقيان

مثال ٨ : إذا كان م عدد نسبى فإن جذرى المعادلة ٢٥س^{٢} + ٥(م+٣)س+٣ م = ٠ يكونان نسبيان

الحل

٢٥س^{٢} + ٥(م+٣)س+٣ م = ٠

∴ أ = ٢٥ ، ب = ٥(م+٣) ، جـ = ٣ م

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (٥(م+٣))^{٢} − ٤ × ٢٥ × ٣م

= ٢٥ (م^{٢} + ٦ م + ٩) − ٢٥ × ١٢ م

= ٢٥ [م^{٢} + ٦ م − ١٢ م +٩] = ٢٥ (م^{٢} − ٦ م + ٩)

= ٥^{٢} (م − ٣)^{٢} = [٥(م−٣)]^{٢} مربع كامل

لذا فإن جذرا المعادلة هى أعداد نسبية

تداريب

١) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٢ ك س+٧ك − ٦ س +٩ =٠ متساويين أوجد قيمة ك

٢) أثبت أن ذرى المعادلة س^{٢} + ك س + ك = ١ ∀ ك ∈ ه دائما نسبيان

٣) أوجد قيم ك التى تجعل المعادلة ٥ س^{٢} + ٤ س + ك = ٠

⊙ حقيقيان متساويان ⊙ حقيقيان مختلفان ⊙ تخيليان

العلاقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها

نعلم أن المعادلة $أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠$ معادلة من الدرجة الثانية لذا ومن النظرية الأساسية فى الجبر يكون لها جذران مهما كانت كينونتهما ونفرض أنهما ل ، م

هذان الجذران ينتجان من القانون $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

لذا فإن أحدهما ليكن $ل = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ والأخر

$م = \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ لذا فإنه يكون :

⊙ $ل + م = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} + \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} =$

$= \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ} - ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-ب - ب}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$

$\therefore ل + م = \frac{-ب}{أ}$ ———— (١)

⊙ $ل\,م = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \times \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{ب^{٢} - ب^{٢} + ٤أجـ}{٤أ^{٢}} = \frac{٤أجـ}{٤أ^{٢}} = \frac{جـ}{أ}$

$\therefore ل\,م = \frac{جـ}{أ}$ ———— (٢)

يمكن إستنتاج حاصل ضرب وجمع الجذرين وذلك بمقارنة المعادلتين :

⊙ $\Leftarrow (س - ل)(س - م) = ٠$

⊙ $\Leftarrow أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠$

وذلك بعد قسمة المعادلة الثانية على أ

أى أن :

حاصل جمع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$

ملاحظات مهمة :

١) فى المعادلة السابقة إذا كان أ = ١ تصبح المعادلة $س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠$ ويكون :
$ل + م = -ب$ ، $ل\,م = جـ$

٢) إذا كانت ب = صفر تصبح المعادلة $أ\,س^{٢} + جـ = $ صفر ويكون :
ل + م = صفر $\Leftarrow ل = -م$

٣) إذا كان أ = جـ أى أن معامل $س^{٢}$ = الحد المطلق تصبح المعادلة $أ\,س^{٢} + ب\,س + أ = ٠$ ويكون :
ل م = ١ أى أن كلا من الجذرين معكوس ضربى للأخر

مثال ١ : فى المعادلات الأتية أبحث نوع الجذرين وأوجد حاصل جمعهما وضربهما

١) $٣س^{٢} + ٥ = ٤\,س$ ٢) $٢س^{٢} + ٣\,س - ٥ = ٠$

٣) $\frac{١}{س - ٢} + \frac{١}{س + ٢} = ٣$

الحل

١) $٣س^{٢} + ٥ = ٤\,س \Leftarrow ٣س^{٢} - ٤\,س + ٥ = ٠$

أ = ٣ ، ب = −٤ ، جـ = ٥

المميز = $ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ = (-٤)^{٢} - ٤\times٣\times٥ = ١٦ - ٦٠ = -٤٤$

عدد سالب ∴ الجذران غير حقيقيان

حاصل الجمع = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٤}{٣}$ حاصل الضرب = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$

٢) $٢س^{٢} + ٣\,س - ٥ = ٠$

أ = ٢ ، ب = ٣ ، ب = −٥

المميز = $ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ = (٣)^{٢} - ٤\times٢\times-٥ = ٩ + ٤٠ = ٤٩$

المميز مربع كامل لذا فإن الجذور أعداد نسبية

حاصل الجمع = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٣}{٢}$ حاصل الضرب = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-٥}{٢}$

٣) $\frac{١}{س - ٢} + \frac{١}{س + ٢} = ٣$

بضرب طرفى المعادلة فى (س−٢)(س+٢)

$س+٢+س-٢ = ٣(س+٢)(س-٢) \Leftarrow ٢س = ٣\,(س^{٢} - ٤)$

$٢\,س = ٣\,س^{٢} - ١٢ \Leftarrow ٣\,س^{٢} - ٢\,س - ١٢ = ٠$

أكمل بنفسك

مثال ٢ : أوجد قيمة جـ إذا علم أن أحد جذرى المعادلة :

١) $س^{٢} - ٦\,س + جـ = ٠$ مربع الجذر الأخر

٢) أحد جذرى المعادلة $س^{٢} + ٣\,س + جـ = ٠$ ضعف الأخر

٣) النسبة بين جذرى المعادلة : $س^{٢} - جـ\,س + ٦ = ٠$ هى ٢ : ٣

٤) $س^{٢} - ١٠\,س + جـ = ٠$ يقل عن مربع الأخر بمقدار ٢

الحل

١) $س^{٢} - ٦\,س + جـ = ٠$ نفرض أن الجذران هما ل ، $ل^{٢}$

حاصل الجمع = $ل + ل^{٢} = \frac{-ب}{أ} = \frac{٦}{١} = ٦ \Leftarrow ل^{٢} + ل - ٦ = ٠$

$(ل-٢)(ل+٣) = ٠ \Leftarrow \therefore ل = ٢$ أو -٣

حاصل الضرب = $ل\times ل^{٢} = \frac{جـ}{أ} = \frac{جـ}{١} = جـ$

$جـ = ل^{٣}$:

∴ عند ل = ٢ $\therefore جـ = ٢^{٣} = ٨$

∴ عند ل = −٣ $\therefore جـ = (-٣)^{٣} = -٢٧$

٢) بنفسك

٣) النسبة بين جذرى المعادلة : $س^{٢} - جـ\,س + ٦ = ٠$ هى ٢ : ٣

نفرض أن الجذران هما ٢ ل ، ٣ ل

حاصل الجمع = ٢ل + ٣ل = ٥ ل = جـ ———— (١)

حاصل الضرب = ٢ ل × ٣ ل = ٦ل^{٢} = ٦ ⟸ ل^{٢} = ١

$\sqrt{\text{ل}^{٢}} = \sqrt{١}$ = ± ١

∴ ل = ± ١ ، جـ = ٥ ل

عند ل = ١ ⟸ جـ = ٥ ل = ٥ × ١ = ٥

عند ل = −١ ⟸ جـ = ٥ × −١ = −٥

٤) س^{٢} − ١٠ س + جـ =٠ يقل عن مربع الأخر بمقدار ٢

نفرض أن الجذران هما ل ، ل^{٢} −٢

∴ حاصل الجمع = ل + ل^{٢} −٢ =١٠ ⟸ ل^{٢}+ ل − ٢ − ١٠ =٠

ل^{٢} + ل − ١٢ = ٠ ⟸ (ل − ٣) (ل + ٤) = ٠

ل=٣ ، ل= −٤

حاصل الضرب = ل(ل^{٢} − ٢) = جـ

عندما ل = ٣ ⟸ جـ = ٣ (٣^{٢} −٢) = ٣ × ٧ = ٢١

عندما ل = −٤ ⟸ جـ = − ٤ ((−٤)^{٢} −٢) = −٤ ×١٤ = −٥٦

مثال ٣ : إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة ٣ س^{٢} − ٢ س + ك = ٠ يساوى ١ أوجد قيمة ك ثم أوجد مجموعة حل المعادلة فى ك

الحل

نفرض أن جزريها هما ل ، م لذا فإن ل م = ١

ل م = $\frac{\text{ك}}{٣}$ = ١ ⟸ ك = ٣

∴ المعادلة تصبح ٣ س^{٢} − ٢ س + ٣ = ٠

ا = ٣ ، ب = −٢ ، جـ = ٣

المميز = ب^{٢} − ٤ ا جـ = ٤ − ٤ ×٣×٣ = ٤ − ٣٦ = − ٣٢

المميز = −٣٢ ⟸ $\sqrt{\text{المميز}}$ = $\sqrt{١٦ \times -٢}$ = ± ٤ $\sqrt{٢}$ ت

س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{اجـ}}}{٢\text{ا}}$ = $\frac{٢ \pm ٤\sqrt{٢}\,\text{ت}}{٢}$ = ١ ±٢ $\sqrt{٢}$ ت

مثال ٤ : إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة س^{٢} − ٢ س + ا = ٠ ∀ ا ∈ ح* فأوجد الجذر الأخر وقيمة ا

الحل

إذا كان (١+ت) أحد جذور المعادلة فإنه حتما يكون (١ − ت) هو الجذر الأخر وذلك لأنهما مترافقان

∴ الجذر الأخر هو ١ − ت

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$ = $\frac{\text{ا}}{١}$ = ا

∴ ا = (١ − ت) (١ + ت) = ١ + ١ = ٢

∴ ا = ٢

مثال ٥ : إذا كان (٢ + ت) أحد جذور المعادلة س^{٢} − ٤ س + ب = ٠ أوجد الجذر الأخر وكذلك قيمة ب

الحل

إذا كان (٢ + ت) أحد جذور المعادلة فإن الجذر الأخر هو (٢ − ت) ⟸ ∴ الجذر الأخر هو (٢ − ت)

⊙ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$ = $\frac{\text{ب}}{١}$ = ب

∴ ب = (٢ + ت) (٢ −−) = ٤ + ١ = ٥

∴ ب = ٥

مثال ٥ : أوجد قيمة ا التى تجعل :

١) أحد جذرى المعادلة ٢ س^{٢} + (ا − ٣)س − ٥ = ٠ هو المعكوس الجمعى للأخر

٢) أحد جذرى المعادلة ٢ا س^{٢} + ٧ س + ا^{٢} + ١ =٠ هو المعكوس الضربى للأخر

٣) مجموع جذرى المعادلة (ا − ١) س^{٢} +(ا − ٣) س − ٤ = ٠ يساوى ٥

الحل

١) فى المعادلة ٢ س^{٢} + (ا − ٣)س − ٥ = ٠

معامل س^{٢} = ٢ معامل س = ا − ٣ الحد المطلق = −٥

∵ أحد الجذرين معكوس جمعى للأخر نفرض أن أحد الجذرين ل يكون الأخر − ل

مجموعهما = ل+(−ل) = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$ = $\frac{-(\text{ا} - ٣)}{٢}$ = ٠

∴ ا − ٣ = ٠ ⟸ ا = ٣

٢) ٢ا س^{٢} + ٧ س + ا^{٢} + ١ =٠

معامل س^{٢} = ٢ا معامل س = ٧ الحد المطلق = ا^{٢} + ١

نفرض أن أحد الجذرين هو ل فيكون الأخر $\frac{١}{\text{ل}}$

حاصل ضربهما = ل × $\frac{١}{\text{ل}}$ = ١ = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$ = $\frac{\text{ا}^{٢} + ١}{٢\text{ا}}$

∴ $\frac{\text{ا}^{٢} + ١}{٢\text{ا}}$ = ١ ⟸ ا^{٢} + ١ = ٢ ا ⟸ ا^{٢} − ٢ا +١ = ٠

(ا − ١)(ا − ١) = ٠ ⟸ ا = ١

٣) متروك للطالب

مثال ٦ : أوجد قيمة م التى تجعل :

١) مجموع جذرى المعادلة س^{٢} − (م + ٤) س + ٣ م^{٢} = ٠ يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة ٢ س^{٢}+٧ م س + م^{٢} =٠

٢) أحد جذرى المعادلة ٨ س^{٢} − ٣٠ س + م = ٠ يساوى مربع الجذر الأخر

الحل

س^{٢} − (م +٤) س+٣م^{٢} = ٠ ٢ س^{٢}+٧ م س + م^{٢} =٠

مجموع الجذرين = $\frac{\text{م} + ٤}{١}$ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{م}^{٢}}{٢}$

ولكن مجموع جذرى المعادلة الأولى = حاصل ضرب جذرى الثانية

∴ $\frac{\text{م} + ٤}{١}$ = $\frac{\text{م}^{٢}}{٢}$ ⟸ م^{٢} = ٢ م + ٨ ⟸ م^{٢} − ٢م − ٨ =٠

(م − ٤) (م + ٢) =٠ ⟸ م = ٤ أو −٢

٢) ٨ س^{٢} − ٣٠ س + م =٠

بفرض أن أحد الجذرين = ل يكون الأخر ل^{٢}

مجموعهما = ل + ل^{٢} = $\frac{٣٠}{٨}$ = $\frac{١٥}{٤}$ ⟸ ٤ ل^{٢} + ٤ ل = ١٥

٤ل^{٢} + ٤ ل − ١٥ = ٠ (٢ ل − ٣) (٢ ل + ٥) = ٠

∴ ل = $\frac{٣}{٢}$ ، ل = $\frac{-٥}{٢}$

حاصل ضربهما = $\frac{م}{٨}$ = ل × ل^{٢} = ل^{٣} ⟸ م = ٨ ل^{٣}

عندما ل = $\frac{٣}{٢}$

⟸ م = ٨ ل^{٣} = ٨ × $(\frac{٣}{٢})^{٣}$ = ٨ × $\frac{٢٧}{٨}$ = ٢٧

عندما ل = $\frac{-٥}{٢}$

⟸ م = ٨ ل^{٣} = ٨ × $(\frac{-٥}{٢})^{٣}$ = ٨ × $\frac{-١٢٥}{٨}$ = −١٢٥

مثال ٧ : أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة
أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠
١) ضعف الجذر الأخر   ٢) يزيد عن الأخربمقدار ٣

الحل

١) نفرض أن أحد الجذرين ل فيكون الأخر ٢ ل

حاصل جمعهما = ل + ٢ل = ٣ ل = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ ل = $\frac{-ب}{٣أ}$

حاصل ضوبهما = ل × ٢ ل = ٢ل^{٢} = $\frac{جـ}{أ}$

بالتعويض عن قيمة ل فى حاصل الضرب

∴ ل = $\frac{-ب}{٣أ}$ ، ٢ل^{٢} = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ ٢$(\frac{-ب}{٣أ})^{٢}$ = $\frac{جـ}{أ}$

٢ × $\frac{ب^{٢}}{٩أ^{٢}}$ = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ $\frac{٢ب^{٢}}{٩أ}$ = $\frac{جـ}{١}$ ⟸ ٢ ب^{٢} = ٩ أ جـ

٢) نفرض أن أحد الجذرين ل فيكون الأخر ل − ٣

حاصل الجمع = ل + ل − ٣ = ٢ ل − ٣ = $\frac{-ب}{أ}$

٢ ل = $\frac{-ب}{أ}$ + ٣ ⟸ ل = $\frac{-ب}{٢أ}$ + $\frac{٣}{٢}$ ——— (١)

حاصل الضرب = ل(ل − ٣) = ل^{٢} − ٣ ل = $\frac{جـ}{أ}$ ——— (٢)

بالتعويض من ١ فى ٢ نجد أن :

$(\frac{-ب}{٢أ} + \frac{٣}{٢})^{٢}$ − ٣ $(\frac{-ب}{٢أ} + \frac{٣}{٢})$ = $\frac{جـ}{أ}$

$\frac{ب^{٢}}{٤أ^{٢}}$ + $\frac{٩}{٤}$ − $\cancel{\frac{٣ب}{٢أ}}$ + $\cancel{\frac{٣ب}{٢أ}}$ − $\frac{٩}{٢}$ = $\frac{جـ}{أ}$

$\frac{ب^{٢}}{٤أ^{٢}}$ + $\frac{٩-١٨}{٤}$ = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ $\frac{ب^{٢}}{٤أ^{٢}}$ + $\frac{-٩}{٤}$ = $\frac{جـ}{أ}$,,,,, × ٤ أ^{٢}

ب^{٢} − ٩ أ^{٢} = ٤ أ جـ ⟸ ب^{٢} = ٩ أ^{٢} + ٤ أ جـ

مثال ٨ :
(١) أوجد قيمة ب التى تجعل مجموع الجذرين للمعادلة
س^{٢} −(ب+٢)س + ٥ب^{٢} = ٠ يساوى حاصل ضرب جذرى
المعادلة س^{٢} − ٣ ب س + ب^{٢} = ٠

الحل

مجموع جذرى المعادلة الأولى = ب + ٢
حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية = ب^{٢}
ب^{٢} = ب + ٢ ⟸ ب^{٢} − ب − ٢ = ٠
(ب − ٢) (ب + ١) = ٠ ⟸ ب = ٢ ، ب = −١

(٢) إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة :
٨ س^{٢} − ب س + ٣ = ٠ تساوى ٢ : ٣ أوجد قية ب

الحل

نفرض أن الجذرين ٢ل ، ٣ ل

مجموع الجذرين = ٢ ل + ٣ ل = ٥ ل = $\frac{ب}{٨}$ ⟸ ل = $\frac{ب}{٤٠}$

حاصل ضرب الجذرين = ٢ل × ٣ ل = ٦ ل^{٢} = $\frac{٣}{٨}$

$\frac{٦ل^{٢}}{١}$ = $\frac{٣}{٨}$ ⟸ ل^{٢} = $\frac{٦ × ٨}{٣}$ = ١٦ ⟸ ل = $\sqrt{١٦}$ = ±٤

∵ ل = $\frac{ب}{٤٠}$ ⟸ ب = ٤٠ ل

عندما ل = ٤ ⟸ ب = ٤٠ × ٤ = ١٦٠

عندما ل = −٤ ⟸ ب = ٤٠ × −٤ = −١٦٠

تدريب

١) إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢} + ى س + هـ = ٠ ضعف الجذر الأخر وان أحد جذرى المعادلة س^{٢} + ى س + و = ٠ ثلاثة أمثال الأخر أثبت أن $\frac{هـ}{و}$ = $\frac{٣٢}{٢٧}$

٢) أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ثلاثة امثال الأخر

(٣

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

إذا كان ل ، م جذرا المعادلة ﺃ س^{٢} + ب س + جـ = ٠
فإنه يمكن كتابتها على الصورة
(س – ل) (س – م) = ٠ ⟸ س^{٢} – ل س – م س + ل م = ٠
س^{٢} – (ل + م) س + ل م = ٠
أى أن المعادلة التربيعية يمكن كتابتها على الصورة :
س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

مثال ١ : كون المعادلة التى جذريها كلا من
١) ٢ ، ٥ ٢) ٣ ، – ٤
٣) –٥ ، ٥ ٤) ٢– √٣ ، ٢+ √٣

الحل
١) س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠
⟸ س^{٢} – ٧ س + ١٠ = ٠
٢) س^{٢} – (–٤ + ٣) س + (٣×–٤) = ٠
⟸ س^{٢} + س – ١٢ = ٠
٣) س^{٢} – (–٥ + ٥) س + (–٥ × ٥) =٠
⟸ س^{٢} – ٠ س – ٢٥ = ٠ ⟸ س^{٢} – ٢٥ = ٠
٤) س^{٢} – (٢–√٣+٢+√٣) س+[(٢– √٣)×(٢ + √٣)]=٠
س^{٢} – ٤ س + (٤ – ٣) = ٠
س^{٢} – ٤ س + ١ = ٠

مثال ٢ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة ٢ س^{٢} – ٣ س + ١ = ٠ أوجد القيمة العددية لكلا مما يأتى
١) ل^{٢} م + م^{٢} ل ٢) $\frac{١}{\text{ل}}+\frac{١}{\text{م}}$

الحل
المعادلة المعطاة هى ٢ س^{٢} – ٣ س + ١ = ٠
حاصل جمع جذريها = ل + م = $\frac{\text{–معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}=\frac{٣}{٢}$
حاص ضرب جذريها = ل م = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}=\frac{١}{٢}$
١) ل^{٢} م + م^{٢} ل = ل م (ل + م) = $\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٢}=\frac{٣}{٤}$
٢) $\frac{١}{\text{ل}}+\frac{١}{\text{م}}=\frac{\text{م+ل}}{\text{ل م}}=\frac{٣}{٢}\div\frac{١}{٢}=\frac{٣}{٢}\times\frac{٢}{١}=٣$

تدريب : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة س^{٢} – ٧ س + ٢ =٠
أوجد القيمة العددية لكلا مما يأتى :
⊙ ل^{٢} + م^{٢} ⊙ ل^{٣} + م^{٣} ⊙ ل – م

ملاحظات مهمة

١) ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م
٢) ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} – ٣ ل م]
٣) (ل – م) = $\sqrt{(\text{ل + م})^{٢} – ٤\,\text{ل م}}$
٤) ل^{٢} – م^{٢} = (ل – م) (ل + م)
٥) ل^{٣} – م^{٣} = (ل – م) [(ل + م)^{٢} ـ ل م]
٦) $\frac{١}{\text{ل}}+\frac{١}{\text{م}}=\frac{\text{ل + م}}{\text{ل م}}$
٧) $\frac{\text{م}}{\text{ل}}+\frac{\text{ل}}{\text{م}}=\frac{\text{ل}^{٢}+\text{م}^{٢}}{\text{ل م}}=\frac{(\text{ل + م})^{٢}–٢\text{ل م}}{\text{ل م}}$

مثال ٣ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة س^{٢} – ٥ س +٤ = ٠
أوجد القيمة العدية لكلا ما يأتى
١) ل^{٢} + م^{٢} ٢) ل^{٣} + م^{٣} ٣) ل – م ٤) ل^{٢} – م^{٢}
٥) ل^{٣} – م^{٣} ٦) $\frac{١}{\text{ل}}+\frac{١}{\text{م}}$ ٧) $\frac{\text{م}}{\text{ل}}+\frac{\text{ل}}{\text{م}}$

الحل
إذا كان جذرا المعادلة ⟸ س^{٢} – ٥ س +٤ = ٠ هما ل ، م فإن :
⊙ حاصل الجمع ل + م = $\frac{\text{–معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}=\frac{\text{– ب}}{\text{ﺃ}}=\frac{٥}{١}=٥$
⊙ حاصل الضرب ل م = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}=\frac{\text{جـ}}{\text{ﺃ}}=\frac{٤}{١}=٤$
١) ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م = (٥)^{٢} – ٢×٤
= ٢٥ – ٨ = ١٧
٢) ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} – ٣ ل م]
= (٥) [(٥)^{٢} – ٣ × ٤] = ٥ × (٢٥ – ١٢)
= ٥ × ١٣ = ٦٥
٣) ل – م = $\sqrt{(\text{ل + م})^{٢} – ٤\,\text{ل م}}=\sqrt{٥^{٢}–٤\times٤}$
= $\sqrt{٢٥ – ١٦}=\sqrt{٩}$ = ±٣
٤) ل^{٢} – م^{٢} = (ل – م) (ل + م) = ±٣ × ٥ = ± ١٥
٥) ل^{٣} – م^{٣} = (ل – م) [(ل + م)^{٢} – ل م]
= ±٣ × [٥^{٢} – ٣] = ٣ × (٢٥ – ٣) = ±٣ × ٢٢
= ± ٦٦
٦) $\frac{١}{\text{ل}}+\frac{١}{\text{م}}=\frac{\text{ل + م}}{\text{ل م}}=\frac{٥}{٣}$
٧) $\frac{\text{م}}{\text{ل}}+\frac{\text{ل}}{\text{م}}=\frac{\text{ل}^{٢}+\text{م}^{٢}}{\text{ل م}}=\frac{(\text{ل + م})^{٢}–٢\text{ل م}}{\text{ل م}}=\frac{١٧}{٣}$

مثال ٤ : إذا كان اللفرق بين جذرى المعادلة

$٦س^{٢} - ٧س + ١ = جـ$ هو $\frac{١١}{٦}$ أوجد قيمة جـ

الحل

أولا المعادلة لا بد أن تكون صفرية

نفرض أن الجذرين هما ل ، م

$ل + م = \frac{٧}{٦}$ ، $ل\,م = \frac{١ - جـ}{٦}$

$$(ل - م) = \sqrt{(ل+م)^{٢} - ٤\,ل\,م} = \sqrt{\left(\frac{٧}{٦}\right)^{٢} - ٤ \times \frac{١ - جـ}{٦}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٩}{٣٦} - \frac{٤ - ٤جـ}{٦} \times \frac{٦}{٦}} = \sqrt{\frac{٤٩}{٣٦} - \frac{٢٤ - ٢٤جـ}{٣٦}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٩ - ٢٤ + ٢٤جـ}{٣٦}} = \sqrt{\frac{٢٥ + ٢٤جـ}{٣٦}}$$

لكن $ل - م = \frac{١١}{٦}$

$\sqrt{\frac{٢٥ + ٢٤جـ}{٣٦}} = \frac{١١}{٦}$ وبتربيع الطرفين

$$\frac{٢٥ + ٢٤جـ}{٣٦} = \frac{١٢١}{٣٦} \Leftarrow ٢٥ + ٢٤\,جـ = ١٢١$$

$$٢٤\,جـ = ١٢١ - ٢٥ = ٩٦ \Leftarrow جـ = \frac{٩٦}{٢٤} = ٤$$

مثال٥: إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة

$س^{٢} + جـ\,س + ٢جـ = ٠$ يساوى ضعف حاصل جمع جذرى المعادلة $س^{٢} + أ\,س + جـ = ٠$ أوجد قيمة جـ

الحل

بفرض أن جذرى المعادلة $س^{٢} + جـ\,س + ٢جـ = ٠$ هما ل ، م

وبفرض أن جذرى المعادلة $س^{٢} + أ\,س + جـ = ٠$ هما هـ ، و

بذلك يكون $\Leftarrow (ل - م) = ٢\,هـ\,و$

أولا ل − م من المعادلة $س^{٢} + جـ\,س + ٢جـ = ٠$

$$ل + م = \frac{-معامل\ س}{معامل\ س^{٢}} = \frac{-ب}{أ} = -\frac{جـ}{١} = -جـ$$

$$ل\,م = \frac{الحد\ المطلق}{معامل\ س^{٢}} = \frac{جـ}{أ} = \frac{٢جـ}{١} = ٢\,جـ$$

$$(ل - م) = \sqrt{(ل+م)^{٢} - ٤\,ل\,م} = \sqrt{(-جـ)^{٢} - ٤ \times ٢\,جـ}$$

$$= \sqrt{جـ^{٢} - ٨جـ} \quad \text{———— (١)}$$

ثانيا ٢هـ و من المعادلة $س^{٢} + أ\,س + جـ = ٠$

$$\odot\ هـ\,و = \frac{جـ}{١} = جـ \quad \text{———— (٢)}$$

ولكن $\Leftarrow (ل - م) = ٢\,هـ\,و$ وبتربيع الطرفين

$$(ل - م)^{٢} = (هـ\,و)^{٢}$$

$$\left(\sqrt{جـ^{٢} - ٨جـ}\right)^{٢} = ٤ \times (جـ)^{٢}$$

$$جـ^{٢} - ٨\,جـ = ٤\,جـ^{٢} \Leftarrow ٤\,جـ^{٢} - جـ^{٢} + ٨\,جـ = ٠$$

$$٣\,جـ^{٢} + ٨\,جـ = ٠ \Leftarrow جـ\,(٣\,جـ + ٨) = ٠$$

$جـ = ٠$ ، $جـ = -\frac{٨}{٣}$

مثال ٦ : إذا علم أن جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥\,س + ٦ = ٠$

هما ل ، م أوجد المعادلة التى جذراها $(ل - ١)$،$(م - ١)$

الحل

فى تكوين المعادلة يلزم إيجاد جذور المعادلة المعطاه ولكن فى معظم المعادلات تكون جذورها تخيلية لذا يصعب التعامل معها بعد إيجادها لذا فإن الطريقة التالية تكون حل أمثل لمعظم المسائل

المعادلة المعطاة :

$$ل + م = \frac{-معامل\ س}{معامل\ س^{٢}} = \frac{٥}{١} = ٥$$

$$ل\,م = \frac{الحد\ المطلق}{معامل\ س^{٢}} = \frac{٦}{١} = ٦$$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع $= ل - ١ + م - ١ = ل + م - ٢ = ٥ - ٢ = ٣$

حاصل الضرب $=(ل - ١)(م - ١) = ل\,م - ل - م + ١$

$= ل\,م - (ل + م) + ١ = ٦ - ٥ + ١ = ٢$

$\therefore$ تكون المعادلة $س^{٢} - ٣\,س + ٢ = ٠$

مثال ٧ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $٢\,س^{٢} + ٣س + ٥ = ٠$

فأوجد المعادلة التى جذراها : $ل^{٢}+٣$ ، $م^{٢}+٣$

الحل

المعادلة المعطاة : $٢\,س^{٢} + ٣س + ٥ = ٠$

$ل + م = \frac{-٣}{٢}$ ، $ل\,م = \frac{٥}{٢}$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع $= ل^{٢}+٣ + م^{٢}+٣ = ل^{٢} + م^{٢} + ٦$

$$= (ل+م)^{٢} - ٢ل\,م + ٦ = \left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٢} - ٢ \times \frac{٥}{٢} + ٦$$

$$= \frac{٩}{٤} - ٥ + ٦ = \frac{٩}{٤} + ١ = \frac{١٣}{٤}$$

حاصل الضرب :

$$(ل^{٢}+٣)(م^{٢}+٣) = ل^{٢}م^{٢} + ٣ل^{٢} + ٣م^{٢} + ٩$$

$$= (ل\,م)^{٢} + ٣\,(ل^{٢} + م^{٢}) + ٩ =$$

$$= \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} + ٣\,\left((ل+م)^{٢} - ٢ل\,م\right) + ٩$$

$$= \frac{٢٥}{٤} + ٣\left(\left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٢} - ٢ \times \frac{٥}{٢}\right) + ٩ =$$

$$= \frac{٢٥}{٤} + ٣\left(\frac{٩}{٤} - ٥\right) + ٩ = \frac{٢٥}{٤} + ٣\left(\frac{-١١}{٤}\right) + ٩$$

$$= \frac{٢٥}{٤} + \frac{-٣٣}{٤} + ٩ = \frac{٢٥ - ٣٣ + ٣٦}{٤} = \frac{٢٨}{٤} = ٧$$

المعادلة $= س^{٢} - \frac{١٣}{٤}س + ٧ = ٠$

أو تكون المعادلة $= ٤\,س^{٢} - ١٣\,س + ٢٨ = ٠$

مثال ٨ : إذا كان ل ، م جذرى المعادلة ٢س^{٢} + ٣ س − ٧ = ٠

أوجد المعادلة التى جذريها (ل + ٢)^{٢} ، (م + ٢)^{٢}

الحل

المعادلة المعطاة : ٢س^{٢} + ٣ س − ٧ = ٠

ل + م = $\frac{-٣}{٢}$ ل م = $\frac{-٧}{٢}$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع = (ل + ٢)^{٢} + (م + ٢)^{٢} =

= ل^{٢} + ٤ل + ٤ + م^{٢} + ٤ م + ٤ = ل^{٢} + م^{٢} + ٤ (ل + م) + ٨

= (ل+م)^{٢} − ٢ ل م + ٤ (ل+م) + ٨

= ($\frac{-٣}{٢}$)^{٢} − ٢ × $\frac{-٧}{٢}$ + ٤ ($\frac{-٣}{٢}$) + ٨

= $\frac{٩}{٤}$ + ٧ − ٦ + ٨ = $\frac{٩}{٤}$ + ٩ = $\frac{٤٥}{٤}$

حاصل الضرب = (ل + ٢)^{٢} × (م + ٢)^{٢} =

[(ل+٢)(م+٢)]^{٢} = [ل م + ٢ ل + ٢ م + ٤]^{٢}

= [ل م + ٢ (ل+م) + ٤]^{٢}

= ($\frac{-٧}{٢}$ + ٢ × $\frac{-٣}{٢}$ + ٤)^{٢} = ($\frac{-٧}{٢}$ − ٣ + ٤)^{٢}

= ($\frac{-٧}{٢}$ + ١)^{٢} = ($-\frac{٥}{٢}$)^{٢} = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ المعادلة هى :

س^{٢} − $\frac{٤٥}{٤}$ س + $\frac{٢٥}{٤}$ = ٠ أو بالضرب × ٤

٤س^{٢} − ٤٥ س + ٢٥ = ٠

مثال ٩: إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة ٦ س^{٢} − ٥ س + ١ = ٠

أوجد المعادلة التى جذريها ل − ٢ ، م − ٢

الحل

المعادلة المعطاة : ٦ س^{٢} − ٥ س + ١ = ٠

مجموع الجذرين = $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = $\frac{ل + م}{ل م}$ = $\frac{٥}{٦}$ ——— (١)

ضرب الجذرين = $\frac{١}{ل}$ × $\frac{١}{م}$ = $\frac{١}{ل م}$ = $\frac{١}{٦}$ ——— (٢)

من المعادلة ٢ و ∵ البسط يساوى البسط ∴ ل م = ٦ ——— i

بالتعويض من i فى (١) نجد أن

$\frac{ل + م}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$ ⟸ ل + م = ٥ ——— $i\,i$

المعادلة المطلوبة :

حاصل جمع الجذرين = ل − ٢ + م − ٢ = ل + م − ٤

= ٥ − ٤ = ١

حاصل ضرب الجذرين = (ل − ٢)(م − ٢) = ل م − ٢ل − ٢م + ٤

= ل م − ٢ (ل + م) + ٤ = ٦ − ٢ × ٥ + ٤

= ٦ − ١٠ + ٤ = صفر

لذافإن المعادلة هى :

س^{٢} − س = ٠

تداريب

تدريب ١ :

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

س^{٢} −٣ س − ٣ = ٠ أوجد القيمة العددية لكلا مما يأتى :

١) ل^{٢} + م^{٢} ٢) ل^{٣} + م^{٣} ٣) ل − م ٤) ل^{٢} − م^{٢}

٥) ل^{٣} − م^{٣} ٦) $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ ٧) $\frac{م}{ل}$ + $\frac{ل}{م}$

تدريب ٢ :

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

٢س^{٢} − ٥ س +١٢ = ٠ أوجد المعادلة التى جذريها

١) ل^{٢} + م^{٢} ٢) ل^{٣} + م^{٣} ٣) ل − م ٤) ل^{٢} − م^{٢}

٥) ل^{٣} − م^{٣} ٦) $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ ٧) $\frac{م}{ل}$ + $\frac{ل}{م}$

تدريب ٣ :

إذا كان ل ، م جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} − ٣ س − ١ = ٠

فأوجد القيمة العددية لكل مما يأتى :

⊙ ل^{٢} + م^{٢} ⊙ ل^{٢} م^{٢} ⊙ ل − م ⊙ ل^{٣} + ل^{٣}