المعادلات الخطية

المعادلة الخطية عبارة عن معادلة تأخذ الشكل التالي:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

بينما جملة معادلات خطية فهي مؤلفة من m معادلة ذات n متغير تأخذ الشكل

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

يمكن أن تكتب جملة المعادلات الخطية على الشكل المصفوفي، كما يلي :

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

تتكون هذه المصفوفة من m سطر وn عمود، حيث ندعو m وn أبعاد المصفوفة، ونعتبر(a_{ij}) العنصر a من المصفوفة ذو الترتيب (i) من السطر و(j) من العمود

مثال: أكتب جملة المعادلات بشكل مصفوفي

$$\begin{pmatrix} 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 46 \\ 5X_1 + X_2 + 2X_3 = 26 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X \quad = \quad b$$

طرق حل جملة المعادلات الخطية

- طريقة التعويض
- طريقة المحددات
- طريقة كرامر *Cramer*

الحل:

- **طريقة التعويض:** من المعادلة (2)

$5X_1 + X_2 + 3X_3 = 26 \Rightarrow \mathbf{X_2 = 26 - 5X_1 - 2X_3}$ ..... (4)

بتعويض قيمة (X_2) من المعادلة (4) في المعـادلة **(1)** نحـصل على :

$4X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 46 \Rightarrow 4X_1 + 5(26 - 5X_1 - 2X_3) + 3X_3 = 46$

$4X_1 + 130 - 25X_1 - 10X_3 + 3X_3 = 46 \Rightarrow -21X_1 - 7X_3 = -84$

بقسمة الطرفين على العدد(-3) فإن:

$\mathbf{3X_1 + X_3 = 12}$..... (5)

وعند بتعويض قيمة (X_2) من المعادلة (4) في المعـادلة (3) نجد أن:

$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 20 \Rightarrow 3X_1 + 2(26 - 5X_1 - 2X_3) + X_3 = 20$

$3X_1 + 52 - 10X_1 - 4X_3 + X_3 = 20 \Rightarrow -7X_1 - 3X_3 = -32$

بقسمة الطرفين على العدد(-1) فإن:

$\mathbf{7X_1 + 3X_3 = 32}$..... (6)

من المعادلة (5) نستخرج قيمة (X_3) كما يلي

$$3X_1+X_3 = 12 \Rightarrow \boldsymbol{X_3 = 12-3X_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

بتعويض قيمة (X_3) في المعادلة (6)

$$7X_1+3(12-3X_1) = 32 \Rightarrow 7X_1+36-9X_1 = 32 \Rightarrow -2X_1 = -4 \Rightarrow \boldsymbol{X_1=2}$$

وبتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (7)

$$X_3 = 12-3X_1 \Rightarrow X_3 = 12-3(2) \Rightarrow \boldsymbol{X_3=6}$$

وبالرجوع للمعادلة (4) نجد قيمة (X_2)

$$X_2 = 26-5X_1-2X_3 \Rightarrow X_2 = 26-5(2)-2(6) \Rightarrow \boldsymbol{X_2=4}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- طريقة المحددات:

نلاحظ أن الجملة المعطاة تكتب على الشكل المصفوفي $Ax = b$، حيث أن:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \mapsto \quad B = \begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ 20 \end{pmatrix}$$

لنحسب المصفوفة المقلوبة A^{-1} من أجل ذلك نحسب محدد هذه المصفوفة فنجد:

$$\text{Det A} = 4(1-4)-5(5-6)+3(10-3) \Rightarrow \text{Det A} = 4(-3)-5(-1)+3(7) \Rightarrow \text{Det A} = -12+5+21$$
$$\text{Det A} = 14$$

معكوس المصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46 \\ 26 \\ 20 \end{vmatrix}$$

مصفوفة المرافقات هي:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} (-3) & -(-1) & (7) \\ -(-1) & (-5) & -(-7) \\ (7) & -(-7) & (-21) \end{vmatrix}$$

معكوس مصفوفة المرافقات

$$\mathbf{A'} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 7 & -21 \end{vmatrix}$$

ثم نكتب :

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 7 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/14 & 1/14 & 7/14 \\ 1/14 & -5/14 & 7/14 \\ 7/14 & 7/14 & -21/14 \end{vmatrix}$$

وهكذا نحصل على الحل بكتابة :

$$\mathbf{X}= \mathbf{A}^{-1}.B \begin{vmatrix} -3/14 & 1/14 & 7/14 \\ 1/14 & -5/14 & 7/14 \\ 7/14 & 7/14 & -21/14 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 46 \\ 26 \\ 20 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{X}= \mathbf{A}^{-1}.B \begin{vmatrix} -3(46)/14 +(26)/14+ 7(20)/14 \\ 1(46)/14-5(26)/14+7(20)/14 \\ 7(46)/14+7(26)/14-21(20)/14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{X}= \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

وبالتالي فان حل الجملة هو: $X_1=2$, $X_2=4$, $X_3=6$

طريقة كرامر *Cramer*

نقوم أولاً بإيجاد محدد مصفوفة المعاملات ثم نقوم بإيجاد محدد المصفوفة الفرعية المشتقة لكل مجهول على حدة.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots$$

ويكون الحل لكل مجهول هو حاصل قسمة محدد هذا المتغير على المحدد الرئيسي.

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad \cdots$$

- نقوم بحساب محدد مصفوفة المعاملات الأساسية:

$$Det\ A= 4(1-4)-5(5-6)+3(10-3) \Rightarrow Det\ A= 4(-3)-5(-1)+3(7) \Rightarrow Det\ A=-12+5+21$$
$$Det\ A=14$$

- نحسب قيمة محدد المصفوفة الفرعية للمجهول الأول

$$\text{Det } X_1= \begin{vmatrix} 46 & 5 & 3 \\ 26 & 1 & 2 \\ 20 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Det\ X_1=46(1-4)-5(26-40)+3(52-20) \Rightarrow Det\ X_1= 46(-3)-5(-14)+3(32)$$
$$\Rightarrow Det\ X_1=-138+70+96 \Rightarrow Det\ X_1=28$$

- نحدد قيم المجهول X_1 على النحو التالي:

$$X_1= \frac{Det\ X_1}{Det\ A} = \frac{28}{14} = 2$$

- نحسب قيمة محدد المصفوفة الفرعية للمجهول الثاني

$$\text{Det } X_1= \begin{vmatrix} 4 & 46 & 3 \\ 5 & 26 & 2 \\ 3 & 20 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Det\ X_2=4(26-40)-46(5-6)+3(100-78) \Rightarrow Det\ X_2= 4(-14)-46(-1)+3(22)$$
$$\Rightarrow Det\ X_2=-56+46+66 \Rightarrow Det\ X_2=56$$

- نحدد قيم المجهول X_2 على النحو التالي:

$$X_2 = \frac{Det\ X_2}{Det\ A} = \frac{56}{14} = 4$$

- نحسب قيمة محدد المصفوفة الفرعية للمجهول الثالث

$$\text{Det } X_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 46 \\ 5 & 1 & 26 \\ 3 & 2 & 20 \end{vmatrix}$$

$$Det\ X_3 = 4(20-52)-5(100-78)+46(10-3) \Rightarrow Det\ X_3 = 4(-32)-5(22)+46(7)$$
$$\Rightarrow Det\ X_3 = -128-110+322 \Rightarrow Det\ X_3 = 84$$

- نحدد قيم المجهول X_3 على النحو التالي:

$$X_3 = \frac{Det\ X_3}{Det\ A} = \frac{84}{14} = 6$$

وبالتالي فان حل الجملة هو: $X_1=2$, $X_2=4$, $X_3=6$

ملاحظة: إذا كان قيمة محدد مصفوفة المعاملات الأساسية يساوي الصفر فلا يمكن إستعمال هذه الطريقة

تمرين

حل جملة المعادلات التالية بمختلف الطرق:

$$\begin{cases} X = 3 - Y \\ 6X + Y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y + 4X = 2 \\ X - 2Y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = X + 2 \\ 4X + 3 = Y \end{cases}$$