هندسة الفركتال وتنمية الابتكار والتذوق الجمالى

تطور تعليم الرياضيات تطوراً مذهلاً مع نهاية القرن العشرين، فانتقل بالمتعلمين من التركيز على حفظ الحقائق وتطبيق الخوارزميات الرياضية إلى اكتشاف قوة الرياضيات ودورها في تنمية تفكيرهم من خلال التطبيقات الحياتية والمجتمعية للرياضيات.

هذا التطور في مجال تعليم الرياضيات أدى إلى توجيه اهتمام أكبر لبنية الرياضيات المعرفية وعلاقتها بمكونات العلوم الطبيعية الأخرى، الأمر الذى أدى اكتشاف نوع جديد من التركيب الهندسي البديع أطلق عليه هندسة الفركتال **Fractal Geometry**.

ويذكر **Naylor (1999, p363)**، أن هندسة الفركتال تفجر طاقات الابتكار والخيال عند المتعلمين، ويعتبر تدريسها ذو أهمية كبيرة في إثراء وتنمية تفكير المتعلمين الذي يعتبر من أهم أهداف تعليم الرياضيات. كما تسهم فى إبراز الجوانب الجمالية في الرياضيات؛ ذلك لأن الفركتلات تقدم لنا أشكالاً ذات قيم جمالية كبيرة وهي ترتبط بشكل مباشر بكيفية تنظيم العالم من حولنا.

ولمزيد من الإيضاح يعرض الباحث فيما يلى بشئ من التفصيل لكل من هندسة الفركتال، والتفكير الإبتكارى، والجمال فى الرياضيات.

أولاً:هندسة الفركتال

شهدت العقود الثلاث الأخيرة تطورات واسعة في مجال الرياضيات. حيث ظهر ما يسمى بالرياضيات العصرية؛ والتى تميزت بتطبيقاتها الواسعة وبدورها الأساسى فى نمو نظريات علمية ورياضية معاصرة مثل نظرية**chaos** أو الفوضى. (نظلة حسن خضر، ٢٠٠٤أ، ص٢١)

والمقصود بها: أن أي تغير فى الشكل المبدئى للنظام مهما كان صغيراً قد يؤدى إلى تفاوت كبير فى مخرجات النظام مع نهاية المطاف، ويُعرف هذا المفعول بأثر الفراشة **(Butterfly Effect)** نسبة إلى أن حركة جناحى الفراشة وهى تحلق فى الجو قد يكون له تأثير على حركة الرياح فى المدى البعيد وربما فى مكان آخر غير الذى كانت تحلق فيه. ويعنى ذلك أن مسارات الأحداث تتباين تبايناً كبيرا بسبب اختلافات تبدو ضئيلة فى الشروط الابتدائية للمشكلة المطروحة. (جيمس جلايك، ٢٠٠٠، ص٤٣)

ويقصد بنظرية الفوضى من الناحية الرياضية مجموعة من الطرق الرياضية والعددية والهندسية التى تمكن الشخص من التعامل مع مشكلات معقدة غير خطية وتلك التى ليس لها حلول عامة صريحة أو لا تخضع لقوانين عامة لحلها. (وليم تاوضروس عبيد، ٢٠٠٨،**web sit**)

وتُعد هندسة الفركتال نموذجاً تطبيقياً لنظرية الفوضى. وقد ساعد تقدم علوم الكمبيوتر وأساليبه وتطبيقاته فى الرسوم والنمذجة على نمو وتطور هذا النوع من الهندسات.

وقد ابتكر Mandelbrot كلمة فركتال Fractal عام ١٩٨٣م لتصف وتشرح العديد من الظواهر الطبيعية، وتأتي كلمة فركتال من الفعل اللاتيني Franger والذي يعني يفتت أو يكسر، وهذا الفعل يرتبط بوصف الخصائص الطبيعية للأشياء، فهي تبدو "مفتتة" غير مستوية في أشكال مركبة ومعقدة مثل التغيرات المتعرجة جداً لساحل جزيرة أو شاطئ. (رضا أبو علوان السيد، ٢٠٠١، ص١١٣)

كما أن كلمة فركتال تأتي من الكلمة اللاتينية Fractious وتعني تكسير أو تفتيت، وهي تصنف مجموعات غير عادية من الخطوط والنقط والتعرجات، ولكلمة فركتال شقين الأول وهو الفركتلات الطبيعية وتختص بالأشكال والأشياء المرتبطة بالطبيعة والعلوم، والثاني في الرياضيات والذي يهتم بدراسة مجموعة الفركتلات التي غالباً ما يكون لها جذور في نظرية الفوضى. (موسى ديب الخورى، ٢٠٠٨، web sit)

(١) نشأة وتطور هندسة الفركتال:

يشير (Camp (2000,p710، إلى أن Mandelbrot هو مؤسس علم هندسة الفركتال، بالضبط كما أسس إقليدس للهندسة الإقليدية. وقد تجسد ذلك فيما أشار إليه Mandelbrot عن خصائص هندسة الفركتال في كتابه (The Fractal Geometry of Nature) الذي نشر عام ١٩٨٣.

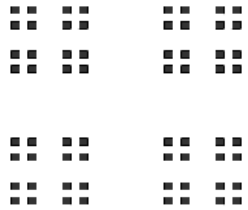
إلا أن Krantz أشار إلى أن معظم أفكار هندسة الفركتال كانت موجودة من قبل. وأن بعض نظرياتها أُثبتت فى عام ١٩٢٠م. فى حين أن أفكار Mandelbrot حول هذه الهندسة لم تظهر قبل عام ١٩٧٥م. ويؤكد Krantz ذلك بقوله " أن الأغراض المسماة حالياً فركتالات اكتشفت ودُرست قبل زمن بعيد من إطلاق هذه التسمية عليها، فإشارة Mandelbrot إلى فكرة التشابه الذاتي لأشكال هندسة الفركتال ما هى إلا تطوير لما قام به الفيلسوف الرياضى "ليبنز" الذي تعمق في دراسة تفاصيل هذه الأغراض.(Krantz, 1991, p.169)

وفكرة التشابه الذاتى تعنى أن بعض الأشكال فى الطبيعة تتكون من أشكال أصغر منها بمقاييس مختلفة، فهى أشكال لها نفس المظهر لأى تكبير أو تصغير مثل فرع شجرة وتفريعاته. أو نهر بروافده. أو شريان وتفرعاته.

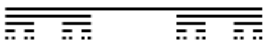
وئؤكد بعض الأدبيات ومنها: (Krantz,1991, p166؛ موسى ديب الخورى، ٢٠٠٨،web sit ؛ معين رومية،٢٠٠٨،web sit) صحة ما أشار إليه Krantz . ففى عام ١٨٧٢م أوجد Carel Vytras، مثالاً لدالة ذات خاصة غريبة، ذلك أنها تستمر في كل مكان ولا يمكن تمييزها في أي مكان، إن مخطط هذه الدالة يدعى حالياً فركتال.

وفى عام ١٨٨٣م قدم Cantor أمثلة لمجموعات جزئية من الخط الحقيقي تتصف بصفات غير طبيعية، حيث تبدأ بخط مستقيم طوله معلوم يكاد يتلاشى مع العديد من التكرارات أطلق عليه مجموعة Cantor الثلثية، كذلك طبق Cantor فكرته على سطح مربع مساحته معلومة فى البداية كادت هى الأخرى

أن تتلاشى فى النهاية مع العديد من التكرارات وأطلق عليها غبار **Cantor** . كما بشكل (١٨) الأتي:(وفاء مصطفى كفافى، ٢٠٠٤، ص٣٠)



فراكتال غبار كانتور



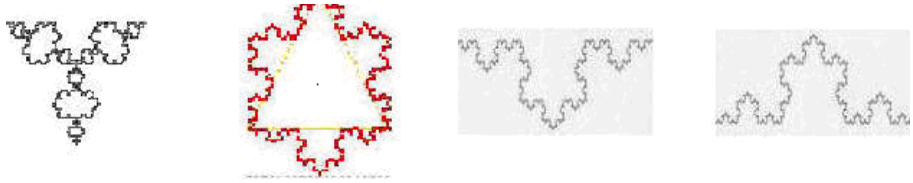
فراكتال مجموعة كانتور الثلثية

شكل(١٨)

فركتالات **Cantor**

إن مجموعة وغبار "**Cantor**" هذه تصنف حالياً على أنها فركتلات. ومن الجدير بالذكر أن فركتالات "**Cantor**" هذه استخدمها "**Mandelbrot**" نفسه فيما بعد ظهور هندسة الفركتال فى تفسير ظاهرة التشويش التى تطرأ بين الحين والآخر على عمليات الاتصال اللاسلكية.

كذلك قدم **Van Koch** عام ١٩٠٤م لأربعة أشكال فركتالية كما هى موضحة فى شكل(١٩)، ومن العجيب فى هذه الفركتالات الأربعة، أنها ذات أشكال مختلفة كما هو ملاحظ إلا أنها تحمل نفس الخواص وكلها نتجت من فكرة واحدة. (رضا أبو علوان السيد، ٢٠٠١، ص ١٣٢)



شكل(١٩)

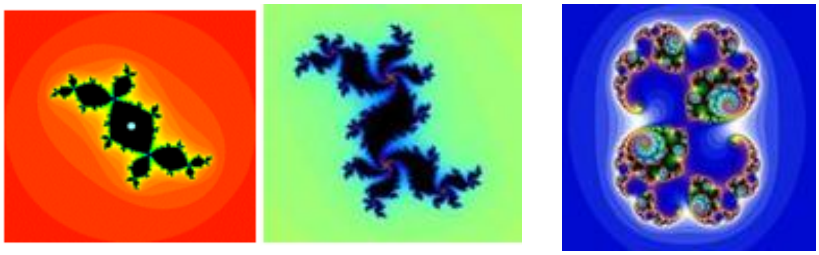
فركتالات **Koch**

وفى عام ١٩١٦م قدم عالم الرياضيات **Sierpinski** شكلاً لا يمر بأى منطقة فى داخلية المربع أطلق عليه بعد عشرات السنين فركتال بساط أو سجادة "**Sierpinski**". ثم تابع تطبيق نفس الفكرة على مثلث متساوى الأضلاع، وعلى هرم كما فى شكل (٢٠). وقد صنفت هذه الأشكال أيضاً إلى فركتالات بعد ظهور هندسة الفركتال. (سها توفيق نمر، ٢٠٠٦، ص ٩٧)

شكل(٢٠)

فركتالات **Sierpinski**

وفى عام ١٩١٨م توصل **Julia** الى مجموعته الشهيرة التى أطلق عليها فيما بعد مجموعة فركتالات "**Julia**" وذلك لدى محاولته دراسة أثر إجراء عمليات التكرار المرحلى المتعاقبة على النقطة المركبة **a+bi** تحت تأثير الدالة التربيعية $f(z)=Z^2+c$ حيث **C** بارمتر عدد مركب، وعندما يساوى صفر فإن مجموعة "**Julia**" تكون دائرة. وإذا اختلفت قيمته عن صفر فإن مجموعة **Julia** تبدأ فى الظهور وتأخذ أشكالاً بديعة كما هى موضحة بشكل (٢١). (نظلة حسن خضر، ٢٠٠٤أ، ص ١٥٥)



شكل(٢١)

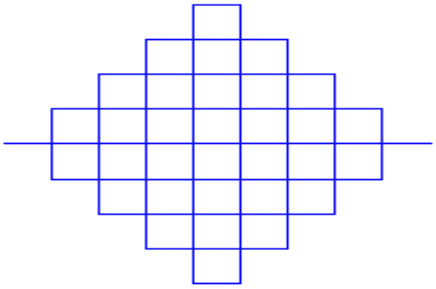
بعض صور مجموعة **Julia**

وفى عام ١٩٢٠، وعلى غرار فكرة "**Sierpinski**" توصل " **Menger**"، من خلال تطبيق مولد فركتالات **Sierpinski** على مكعب، إلى فركتاله المعروف باسم إسفنجة "**Menger**" كما فى شكل (٢٢).(رضا أبو علوان السيد، ٢٠٠٨، **web sit**)

شكل(٢٢)

اسفنجة **Menger**

كما استطاع العالم الرياضى الفرنسى "**Peano**" عام ١٩٣٢م التوصل الى المنحنى الموضح بشكل (٢٣) الآتى، والذى يملأ سطح المستوى. عُرف فيما بعد ظهور هندسة الفركتال باسم فركتال "**Peano**" أو منحنى "**Peano**" لملء المستوى. وهذا الفركتال على النقيض فى خواصه من فركتالات "**Sierpinski**"، و فركتالات "**Cantor**". حيث أنه بعد العديد من التكرارات يملأ سطح مربع. مع العلم بأنه نشأ من قطعة مستقيمة ليس لها مساحة. إلا أنه فى النهاية يعطى شكلاً أو فركتالاً ذا مساحة تساوى مساحة سطح المربع الذى يملأ داخليته. (سها توفيق نمر، ٢٠٠٦، ص ٩٩)



شكل(٢٣)

فركتال منحنى **Peano**

ويرجع الفضل فى ظهور هندسة الفركتال بالشكل المتعارف عليه الآن إلى "**Mandelbrot** " وذلك مع نهاية السبيعنات من القرن الماضى. وارتبط اكتشافه لهندسة الفركتال بمحاولته حساب طول شاطئ انجلترا. ودفعه ذلك إلى البحث فى الأشكال المتشابهة ذاتياً والمتمثلة فى أعمال بعض الرياضيين السابقين أمثال "**Koch**"، و"**Cantor**"، و "**Julia**". ومنها بدأ في اكتشاف نوع جديد من التركيب الهندسي البديع أطلق عليه هندسة الفركتال **Fractal Geometry**. وقد اشتهر هذه النوع من الهندسات فى التسعينات. و بدأ تعريفها لمعلمى الرياضيات فى عام ٢٠٠٢م. (نظلة حسن خضر،٢٠٠٤أ، ص ٤٧)

(٢) ماهية هندسة الفركتال

يُعد مصطلح هندسة الفركتال من المصطلحات الجديدة فى الأدبيات العربية لتعليم الرياضيات. وعليه فقد تعددت الترجمات لهذا المصطلح ومنها: هندسة المصغرات، وهندسة الفتافيت أو التفتيتات، وهندسة التكرارات وهندسة الطبيعة، و هندسة الكسور أو الكسريات. ورغم تعدد ترجمات المصطلح، إلا أن معظم التعريفات تدور حول خواص وطرق توليد أشكال هندسة الفركتال. ويتضح ذلك مما يلى:

يرى **Mandelbrot (1983,p203)**، أن هندسة الفركتال: "مجموعة من الأشكال الهندسية الخشنة ذات الانكسارات، بحيث يمكن تقسيم أى شكل منها إلى أجزاء كل منها هو تصغير للشكل لعديد من المقاييس".

ويتفق تعريف **Clapham (1996,p103)**، مع "**Mandelbrot**" على أنها: "مجموعة من النقط ذات تركيب متماثل، وعادة ما تحتوي على بعض القياسات ذات التشابه الذاتى، فأي جزء تحتويه داخلها يعتبر صورة مصغرة للمجموعة كلها".

وبالمثل تعرفها سوسن محمد موافى (٢٠٠٤،ص١٣) بأنها: "الأشكال الهندسية التى تنتج من تفتيت أو تجزئة الشكل الأساسى إلى عدة أجزاء كل جزء منها صورة من الشكل الأصلى".

إلا أن نظلة حسن خضر (٢٠٠٤أ، ص٩٦) تنظر إلى هندسة الفركتال من جانب آخر يختلف عن التعريفات السابقة. فتعرفها على أنها: "مجموعة من الأشكال الهندسية والتى لها بُعد فركتالى أكبر من أو يساوى بعدها التوبولوجى".

وتُعرَّف هندسة الفركتال فى القاموس الإلكتروني (E. Dictionary, web sit) على أنها: "نمط هندسي يتكرر على مقاييس تتزايد في الصغر وتؤدي إلى أشكال وأسطح غير منتظمة لا يمكن تمثيلها من خلال خصائص الهندسة الإقليدية".

وتضيف Baransely (1998,p10)، أن هندسة الفركتال هى لغة جديدة يمكن اعتبارها امتداداً للهندسة الإقليدية. ففى حين تقدم الهندسة الإقليدية التقريب المبدئى لتراكيب الأشياء فى الطبيعة ويمكن استخدامها فى التطبيقات التكنولوجية؛ فهندسة الفركتال تسهم فى دراسة مثل هذه التركيبات. فعن طريقها يمكن وصف السحب والجبال والشواطئ المتعرجة بدقة بالغة.

وتلخص Randi (1999,p260)، تعريف "Baransely " بأن هندسة الفركتال هى: "هندسة الطبيعة نظراً لارتباطها بالأشياء والظواهر الطبيعية".

بينما يعرفها رضا أبوعلون السيد (٢٠٠٨، web sit) بأنها: "الأشكال الهندسية المتشابهة ذاتياً، التى تنتج بإتباع مجموعة الخطوات تأخذ سمة التكرار اللانهائى بحيث يكون ناتج التكرار الأول مدخلاً فى التكرار التالى".

ويعرفها Julia بأنها: "الأشكال الهندسية المعقدة الناتجة من التكرار المتعاقب لتطبيق بعض المعادلات الرياضية على نقطة أو أكثر فى المستوى المركب". (David.G, 2002, p: 34)

وأياً كانت التسمية العربية. وتعدد تعريفات هندسة الفركتال. إلا أنها أصبحت مكون أساسى من مكونات الرياضيات الحديثة. ومع كونها تقدم أشكالاً هندسية بصور جذابة. فإنها أيضاً قدمت إطاراً نظرياً لتطوير موضوعات أخرى غير رياضية مثل نمذجة الأشياء مثل النباتات وغيرها وكذلك نمو الخلايا البكتيرية.

ويخلُص الباحث من التعريفات السابقة إلى أن هندسة الفركتال عبارة عن:

- مجموعة من الأشكال الهندسية تنتج من تقسيم الشكل الأساسي إلى أجزاء صغيرة، وكل جزء هو صورة مصغرة من الشكل الأساسي.
- الصور التى تنتج من التكرار المرحلى اللانهائى على بعض الأشكال الهندسية.
- الصور التي تنتج من التكرار المتعاقب لبعض المعادلات الرياضية على بعض النقاط فى المستوى المركب.
- مجموعة من الأشكال لها بُعد خاص يختلف عن البعد الإقليدى والتوبولوجى.

كما يلاحظ أن بعض التعريفات السابقة تلقى الضوء على طرق توليد الفركتال ومنها تعريف "رضا أبوعلوان السيد" وتعريف "Julia". بينما تشير تعريفات كل من "Mandelbrot"، و "Clapham " و "سوسن محمد موافى"؛ الى خاصية التشابه الذاتى. ويتطرق تعريف "نظلة حسن خضر" الى خاصية أخرى وهى خاصية البعد الفركتالى. ويختلف تعريف "Baransely " وتعريف "Randi " عن هذه التعريفات فى كونه ينظر إلى هندسة الفركتال على أنها هندسة الطبيعة.

وتأسيساً على ما سبق تُعرِّف الدراسة الحالية هندسة الفركتال بأنها: مجموعة من الأشكال الهندسية المتشابهة ذاتياً، بُعدها الفركتالى أكبر من أو يساوى بُعدها التوبولوجى. يمكن توليدها بالتكرار المرحلي أو بالدوال المتكررة مرحلياً.

(٣) خصائص هندسة الفركتال.

تتميز هندسة الفركتال بخصائص أساسية تعطى لها ذلك التركيب الفريد بين فروع الهندسات الأخرى كما يمكن تعريفها من خلالها وهما:

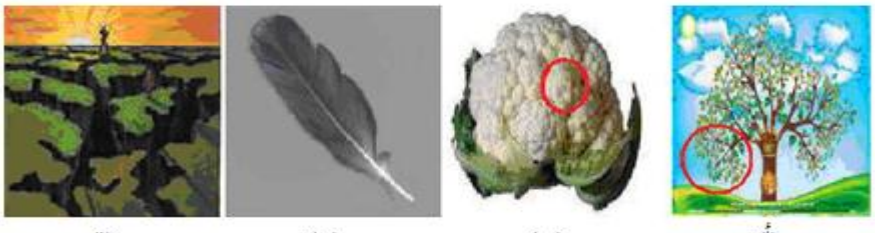
أ- خاصية التشابه الذاتي Self- Similarity

يقصد بالتشابه الذاتى التشابه بين الأجزاء المكونة للشكل، أي أن الجزء يشبه تماماً ذلك الكل، فإذا أضفنا جزءاً متكاملاً من الأجزاء المتكونة للشكل الفركتالي، ثم قمنا بتكبيره عدة مرات فإننا في النهاية سنحصل على الشكل الأصلي. (رضا أبو علوان السيد، ٢٠٠٨، web sit)

وتتجلى هذه الخاصية بوضوح فى التعريفات السابقة التى تم عرضها حول مفهوم هندسة الفركتال. ويمكن التمييز بين نوعيين من التشابه الذاتى هما:

- **التشابه الذاتي الطبيعي (الإحصائي).**

من أمثلة هذا النوع من التشابه تفريعات فرع شجرة. أو ريشة طائر، أو مقطع لمخ حيوان، أو مقطع لزهرة قرنبيط. كما يتضح من شكل (٢٤).



شكل(٢٤)

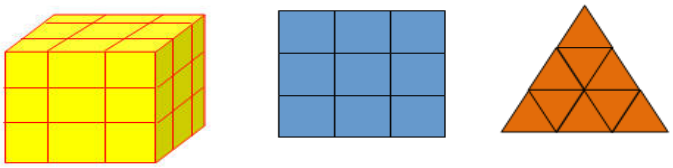
نماذج للتشابه الذاتى الطبيعى

وقد لاحظ علماء الأحياء أن الأوعية الدموية وشعيراتها عبارة عن أمثلة للتشابه الذاتى فهى تتشعب وتنقسم الى مكونات أصغر فأصغر. مثلها مثل الشعيرات الجذرية فى النبات أو الشعب الهوائية فى الرئة. (نظلة حسن خضر،٢٠٠٤أ، ص ٥٩)

إلا أن هذا النوع من التشابه لا يكون مضبوطاً تماماً على اختلاف المقاييس بمعنى أن التشابه الذاتى يبدو فى الشكل مع إغفال بعض الملامح. إلا أن سمات الأنماط الإحصائية تتكرر ولذا أطلق عليه تشابه ذاتى إحصائي.

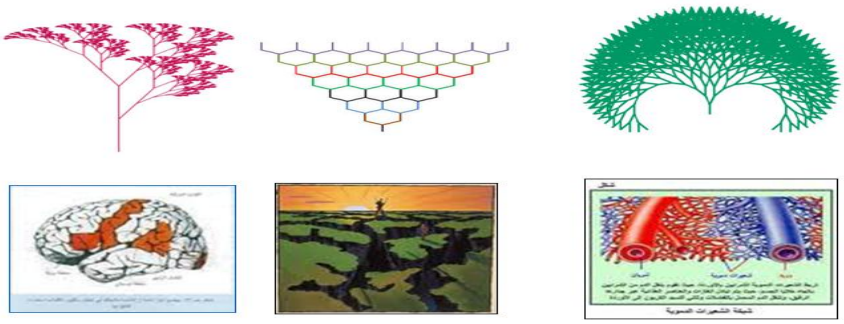
- **التشابه الذاتي المضبوط (الرياضي) أو الإصطناعي.**

من أمثلة هذا النوع التشابه الموجود فى الأشكال الهندسية. والفرق بينه وبين النوع السابق أن الأشكال الأصغر المنقسم إليها الشكل الأصلى بأية مقاييس تكون مثله تماماً وأن الانقسام يتكرر بانضباط ولذا سمى بالتشابه الذاتى المضبوط. كما فى شكل (٢٥).



نماذج للتشابه الذاتى المضبوط

والتشابه الذاتى من الخواص المميزة للفركتالات فقط. ويعنى ذلك أن أى شكل فركتالى يكون متشابه ذاتياً. وليس كل شكل متشابه ذاتياً يمثل بالضرورة فركتال ويتضح ذلك من شكل(٢٦). فالشكل المتشابه ذاتياً يكون فركتالاً إذا كان وكان فقط لا يتقاطع نفسه. (نظلة حسن خضر، ٢٠٠٤أ،ص٨٣)



شكل(٢٦)

نماذج لأشكال متشابه ذاتياً لا تمثل فركتالات

فالأشكال السابقة أشكال متشابهة ذاتياً. بعضها تتوفر فيه خاصية التشابه الذاتى الطبيعى والأخرى تتوفر بها خاصية التشابه الذاتى المضبوط. ومع ذلك فهى لا تمثل فركتالات لأنها تتقاطع مع نفسها.

ب- خاصية البعد الفركتالي Fractal Dimension

البعد الفركتالى هو الخاصية الثانية التى يمكن من خلالها تعريف هندسة الفركتال. وذلك البُعد يعبر عن مدى التعريجات (التعقيدات) فى الشكل وكلما زاد عدد هذه التعريجات كلما زاد البُعد الفركتالى للشكل.

ومن المعروف من الناحية الرياضية وبالأخص فى الهندسة التحليلية لـ "ديكارت " أن أى نقطة على الخط المستقيم له بعد واحد R^1. وأى نقطة على المستوى لها بعدان R^2. وهكذا النقطة فى الفراغ النونى لها "ن" من الأبعاد R^n.

كذلك هناك أبعاد توبولوجية لـ" بوانكرية" وفيها أن البعد التوبولوجى لمجموعة محدودة من النقط يساوى صفر(d=0). والبعد التوبولوجى للقطعة المستقيمة (d=1) وهكذا. مع ملاحظة أن هذه الأبعاد عبارة عن أعداد صحيحة أكبر من أو تساوى الصفر. (محمد يس البكرى، صلاح الدين يس البكرى،٢٠٠٥، ص٣٨١)

إلا أن "Mandelbrot" قدم بُعداً أخر لهندسته أطلق عليها البعد الفركتالى "D" هذه الأبعاد عبارة عن عدد موجب، إلا أنه غير صحيح. ولهذا سميت هندسته بالهندسة الكسرية تمشياً مع أبعادها. ويمكن حساب هذا البعد لأى فركتال من خلال إيجاد القيمة المطلقة للنسبة التالية (Thomas,2002,p65)

$$D = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}}$$

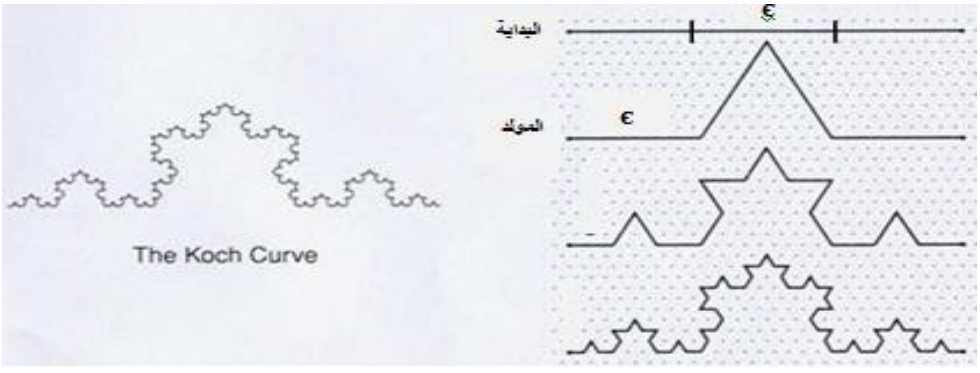
حيث تشير N(ϵ) إلى عدد وحدات القطعة المستقيمة أو الخلايا التى تغطى الشكل المولد للفركتال. أما (ϵ) فتشير إلى طول القطع المستقيمة أو طول ضلع الخلية فى الشكل الأساسى والذى طوله أو مساحته أو حجمه الوحدة.

وهناك أكثر من طريقة لحساب قيمة البعد الفركتالى، وكلها تعتمد على العد لحساب قيمتى N(ϵ)، (ϵ)ومن ثم التطبيق فى النسبة السابقة. ومن هذه الطرق:

- **الطريقة التحليلية**

هذه الطريقة تقوم على أساس العد لمكونات المولد (العملية) التى تولد الفركتال. فمثلاً بالنسبة للمولد المطبق على قطعة مستقيمة طولها الوحدة يكون (ϵ) هو طول القطع المستقيمة الجزئية المنقسم اليها القطعة المستقيمة الأصلية. وتكون N(ϵ) عدد القطع المستقيمة التى طول كل منها (ϵ) للمولد. (Michel,2000,web sit)

وفيما يلى مثال يوضح كيفية استخدام الطريقة فى حساب البعد الفركتالى لمنحنى "Koch". مع ملاحظة أن المنحنى يتكون من تعرجات لقطعة مستقيمة بعدها التوبولوجى d=1 كما فى شكل (٢٧).



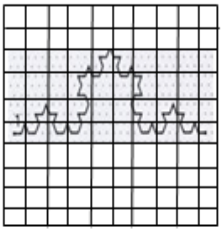
شكل (٢٧)

منحنى Koch

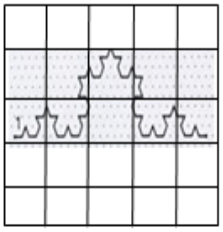
باعتبار القطعة المستقيمة (البداية) والتى كانت الأساس فى تكوين الفركتال طولها الوحدة. فتكون (ϵ=1\3). وبعد عدد الخلايا المكونة للمولد تكون [N(ϵ)=4]. وعليه يكون قيمة البعد الفركتالى للمنحنى تساوى (1.26) وهى قيمة أكبر من البعد التوبولوجى للمنحنى ذاته والذى قيمته تساوى (1).

- **طريقة الشبكة التربيعية**

تقوم هذه الطريقة على عد الخلايا **N(ϵ)** (المربعات التى تنقسم إليها الشبكة التربيعية وطول ضلع كل منها (ϵ)) التى تغطى الشكل النهائى للفركتال. مع ملاحظة أنه كلما كانت الشبكة دقيقة كلما جاءت النتيجة أكثر دقة. (**Thomas,2002,p67**) ويتضح ذلك من شكل (٢٨).



(ب) شبكة ١٠×١٠



(أ) شبكة ٥×٥

شكل (٢٨)

حساب البعد الفركتالى بالشبكة التربيعية

فى الشبكة (أ) تم تقسيم المربع الذى طول ضلعه الوحدة إلى (25) مربعاً جزئياً طول ضلع كل منها (ϵ) وقيمتها $\frac{1}{5}$. وعدد المربعات (الخلايا) **N(ϵ)** التى تغطى شكل المنحنى يساوى (7). أى أن قيمة البعد الفركتالى للمنحنى تساوى **(1.209)**

وفى الشبكة (ب) تم تقسيم المربع الذى طول ضلعه الوحدة إلى (**100**) مربعاً جزئياً طول ضلع كل منها (**ϵ=1\10**). وعدد المربعات (الخلايا) التى تغطى شكل المنحنى **[N(ϵ)=21]**. وعليه تكون قيمة البعد الفركتالى للمنحنى تساوى (**1.259**). ولعل هذه القيمة أدق من سابقتها. وكلما زاد عدد الخلايا المكونة للشبكة التربيعية التى تغطى سطح الفركتال النهائى كلما جاءت النتائج أكثر دقة.

- **طريقة المسطرة.**

تعتمد هذه الطريقة على استخدام الحاسب الآلى وقد ساعد تطور علوم وبرامج الحاسب فى سهولة استخدام الطريقة حيث تأتى على درجة عالية من الدقة. وفيها يتم تغطية شكل الفركتال النهائى بعدة مساطر متساوية طول أى منها (ϵ). وباستخدام الرسوم البيانية مع تصغير طول المسطرة أكثر وأكثر وإيجاد عددها **N(ϵ)** يمكن حساب البعد الفركتالى. (نظلة حسن خضر، ٢٠٠٤أ، ص ١١٩)

وبالمقارنة بين الطرق الثلاث لحساب البعد الفركتالى يتضح أن:

- الطريقة التحليلية أبسط الطرق لحساب البعد الفركتالى.
- تستخدم الطريقة التحليلية لحساب البعد الفركتالى للفركتال فى أية مرحلة من مراحل تكوينه. بينما تعتمد طريقتى الشبكة التربيعية والمسطرة على الشكل النهائى للفركتال.
- يمكن حساب البعد الفركتالى بالطريقة التحليلية باستخدام الورقة والقلم. بينما يحتاج الأمر إلى أجهزة الكمبيوتر فى طريقة المسطرة. وتجمع طريقة الشبكة التربيعية بين الأسلوبين مع كون الاعتماد على أجهزة الكمبيوتر أفضل.

(٤) طرق توليد (إنتاج) الفركتال.

رغم تنوع أشكال هندسة الفركتال واختلافها فى مستوى التعقيد. إلا أنه يمكن تصنيفها إلى مجموعتين إحداهما تمثل هندسة الفركتال الكلاسيكية ومنها فركتالات (**Koch**، **Cantor**، **Sierpinski**) ويتم توليدها باستخدام طريقة التكرار المرحلى. والأخرى تمثل هندسة الفركتال الحديثة التى تحاكى الطبيعية ومنها فركتالات (مجموعات **Julia**)، وفركتال (مجموعة **Mandelbrot**) ويتم توليدها بنظام الدوال المتكررة مرحلياً.

أ- طريقة التكرار المرحلى Iteration

يتم توليد الفركتال فى هذه الطريقة بإتباع مجموعة من الخطوات تأخذ سمة التكرار اللانهائى حيث يكون ناتج التكرار الأول مدخلاً للتكرار التالى وهكذا. ويتم ذلك (سوسن محمد موافى، ٢٠٠٤، ص١٨) كما يلي:

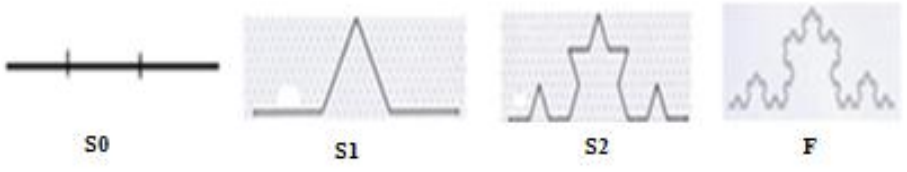
- تجزئة نقطة البداية (شكل هندسى ما) بأسلوب معين.
- إنشاء المولد بطريقة رياضية (قاعدة أو دالة رياضية).
- تكرار إنشاء المولد على كل جزء ينتج فى الخطوة السابقة.

وفيما يلى توضيح لكيفة توليد فركتال منحنى "**Koch**" وفركتال ندفة ثلج "**Koch**": باستخدام هذه الطريقة.

* <u>توليد فركتال منحنى **Koch**</u>:<u>(**The Koch curve**)</u>

قدم العالم السويدى "**Koch**" عام ١٩٠٤م ما عُرف فيما بعد باسم فركتال منحنى "**Koch**" ويمكن إنشاء هذا المنحنى كما يتضح من شكل (٢٩)، بإتباع الخطوات التالية: (سها توفيق نمر، ٢٠٠٦، ص ٤٨)

- البدء برسم قطعة مستقيمة وتقسيمها إلى ثلاثة أجزاء متساوية (البداية S_0)
- نزع القطعة في المنتصف واستبدالها بمثلث متساوى الأضلاع ثم نزع قاعدته (المولدS_1).
- استخدام المولد كأساس للمرحلة التالية في الإنشاء (S_2).
- كرر ما سبق بأي عدد من التكرارات تصل إلى المنحنى المطلوب.



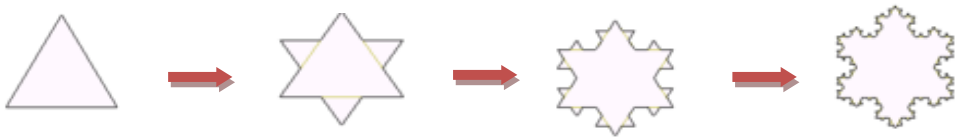
شكل (٢٩)

توليد فركتال منحى **Koch**

ويتحقق فى المنحنى خاصية التشابه الذاتى. كما تم حساب البعد الفركتالى "D " لهذا المنحنى فى الصفحات السابقة بأكثر من طريقة وتبين أنه يساوى تقريباً (1.26) وهو أكبر من بعده التوبولوجى d والذى يساوى (1). ويمكن التنبؤ بأن طول منحني "Koch" غير محدود مع أنه محتوى بالكامل ضمن سطح محدود.

* **تولید فرکتال ندفة ثلج Koch : (The Koch Snow Flake)**

يذكر كل من " Michel (2000,web sit) و Lanius (2007) ، أن "Koch" طبق المولد السابق على مثلث متساوى الأضلاع وتوصل منه إلى ما يسمى بندفة ثلج "Koch" الموضحة بشكل (٣٠).



شكل (٣٠)

توليد فركتال ندفة الثلج لKoch

ويحقق فركتال ندفة الثلج خاصية التشابه الذاتى. وبحساب البعد الفركتالى له. مع الأخذ فى الاعتبار أن البداية بمثلث طول ضلعه الوحدة وتأثير المولد على كل ضلع من أضلاع المثلث هو نفس تأثيره فى القطعة المستقيمة المكونة لمنحنى Koch. يكون بعده الفركتالى مساوياً للبعد الفركتالى للمنحنى.

ويؤكد هذا المثال على خاصية هامة للبعد الفركتالى وهى ما أشار إليها McGuire (1991,p16)، وأطلق عليها قاعدة الإحلال والتى تعنى أنه من الممكن الحصول على فركتالات مختلفة تماماً فى الشكل النهائى. لها نفس البعد الفركتالى إذا ما تم إحلال المولد (العملية) الخاصة بفركتال ما فى فركتال آخر.

ب- طريقة الدوال المتكررة مرحلياً Iterated Function System (IFS)

لما كان مفهوم التشابه الذاتى يتضمن التكبير أو التصغير بمقاييس عدة. فهذا يبين إمكانية استخدام بعض التحويلات الهندسية فى توليد العديد من الفركتالات سواء بالتكبير أو التصغير بصورة متتابعة أو مرحلية.

ويسمى نظام تحويل التشابه الذاتى من خلال التحويلات الهندسية التى تقوم بالتصغير بالدوال الانقباضية أو الانكماشية. وعند تطبيقها تكون أى مسافة بين نقطتين أقل من المسافة الأصلية. فمثلاً عند اعتبار F دالة انكماشية وباستخدام التكرار المرحلى فقيمة الدالة F(×) فى التكرار الأول n1 تستخدم كمدخل للتكرار المرحلى الثانى n2 الذى ينتج عنه FF(×) .. وهكذا. (نظلة حسن خضر،٢٠٠٤أ ، ص١٣٢)

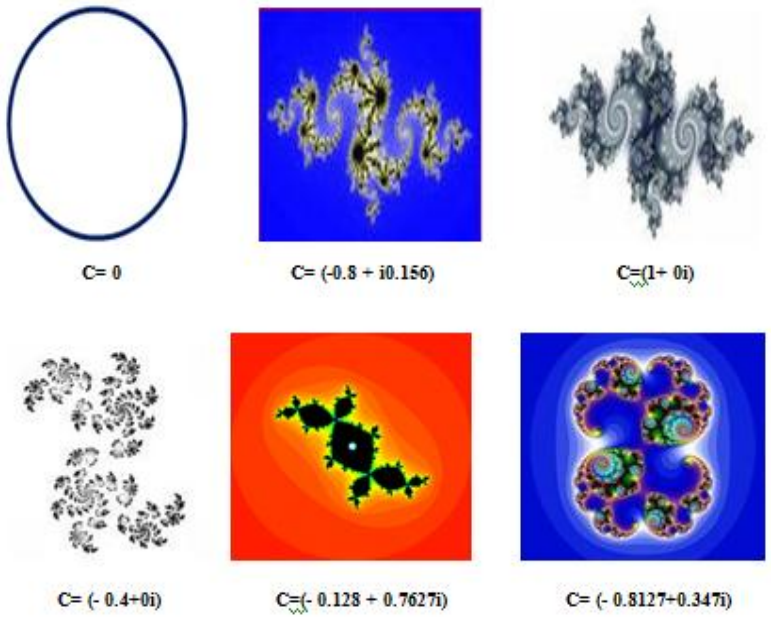
وترجع الأهمية العملية لأنظمة الدوال المتكررة مرحلياً إلى إمكانية استخدامها فى توليد الفركتالات الحديثة والتى يصعب توليدها بطريقة التكرار المرحلى. كما تستخدم لعمل المناظر الطبيعية فى خلفيات السينما وفى محاكاة الظواهر الطبيعية والتى يمكن تنفيذها باستخدام برامج الكمبيوتر.

وفيما يأتى توضيح لكيفة توليد فركتالات (مجموعات **Julia**)، وفركتال (مجموعة **Mandelbrot**) باستخدام هذه الطريقة.

* **توليد مجموعات Julia "Julia Sets"**

بحث **Julia** تصرف النقط على المدى البعيد فى المستوى المركب بالتكرار المرحلى للدالة التربيعية المركبة $F(z)= z^2+c$ حيث **c** بارمتر عدد مركب **a+ib**. وعندما تكون **C=0** تأخذ مجموعات "**Julia**" شكل دائرة مهما تعاقبت التكرارات. وعندما تختلف قيمة **C** عن الصفر وبتطبيق التكرار التالى تبدأ مجموعات "**Julia**" شكل(٣١) فى الظهور : (رضا أبو علوان السيد، ٢٠٠١، ص١١٨)

$$F(z)= z^2+c \longrightarrow (z^2+c)^2+c \longrightarrow [(z^2+c)^2+c]^2+c \longrightarrow \cdots\cdots$$

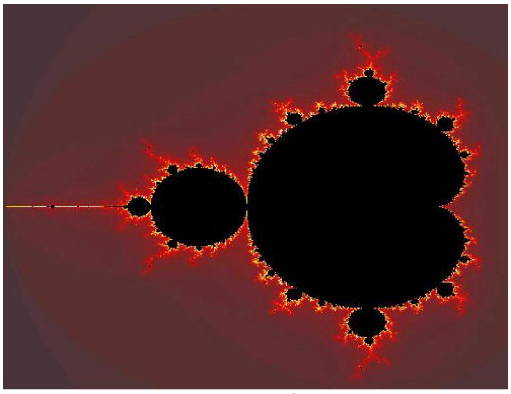


بعض مجموعات **Julia** لقيم البارمتر **C** المختلفة

* **مجموعة Mandelbrot "Mandelbrot sets"**

اهتم **Mandelbrot** بدراسة قيم البارمتر **C** لنفس التكرار المرحلى على الدالة التربيعية المركبة التى استخدمها "**Julia**" بحثاً منه عن قيم **C** التى تؤدى إلى أن تكون مجموعات "**Julia**" متصلة. واعتبر النقطة الحرجة للدالة هى **Z=0+0i** والتى يبدأ منها عملية التكرار .(سها توفيق نمر ،٢٠٠٦، ص ٥٥)

وفى عام ١٩٧٨م توصل **Mandelbrot** لكتابة برنامج كمبيوترى لرسم مجموعة كل النقط فى مستوى البارمتر **C** المركب التى يكون فيها مجموعات "**Julia**" متصلة. شكل(٣٢) الآتى، وعلى هذا الأساس تعد مجموعات "**Julia**" مجموعة جزئية من مجموعة **Mandelbrot**.

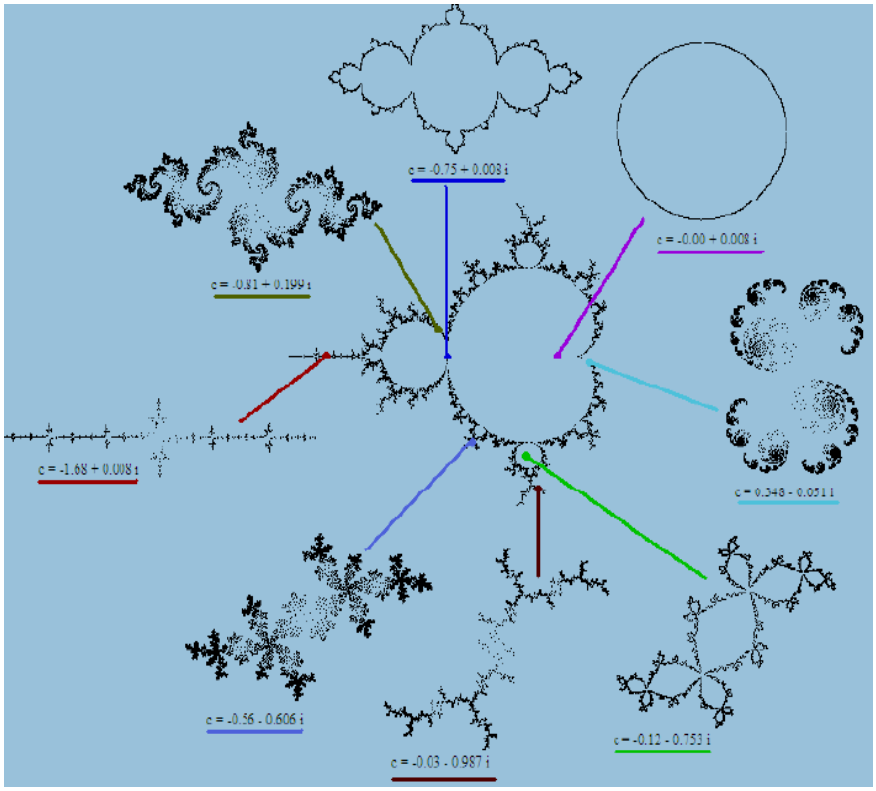


شكل(٣٢)

مجموعة **Mandelbrot**

ويذكر "جيمس جلايك" (٢٠٠٠، ص ١٦٦) أن مجموعة "**Mandelbrot**" تعد من أغرب وأشهر الفركتالات المعروفة حتى الآن فى علم الرياضيات. ويدل الفحص الدقيق لأجزائها على أشكال أكثر فركتالية من الفركتالات نفسها. فأجزاؤها (مجموعات **Julia**) غاية فى الثراء فى تعقدها ويتطلب الوصف الرقمى لحدودها كماً لا نهائياً من المعلومات.

ويوضح شكل(٣٣) العلاقة بين مجموعات **Julia** ومجموعة **Mandelbrot**.



شكل(٣٣)

العلاقة بين مجموعات **Julia** ومجموعة **Mandelbrot**

يتضح مما سبق أن هندسة الفركتال كفرع من أفرع الرياضيات الحديثة؛ ذات أهمية خاصة بالنسبة لمعلم الرياضيات ذلك لأنها تسهم فى تغيير النظرة إلى الرياضيات على أنها لغة المجردات لتكسبها الحيوية بربطها بالطبيعة. كما تساعد أيضاً فى تفسير العديد من الظواهر الطبيعية التى كان من الصعب إيجاد تفسيرات أو حلول لها. فعن طريقها يمكن وصف السحب والجبال والأشجار والشواطئ البحار وغيرها مما عجزت عنه الهندسة الإقليدية.

كما يلاحظ أن هندسة الفركتال تتميز بخصائص فريدة مثل خاصية التشابه الذاتى والبعد الفركتالى لأشكالها. تلك الخصائص ميزتها عن الهندسات الأخرى كالإقليدية والفراغية والتحليلية.

(٥) أهمية تدريس هندسة الفركتال.

يهتم تدريس هندسة الفركتال بمساعدة المتعلمين علي: (David.G,2002,p32, Elizondo, G. B, 2001,p203)

- وصف الأشكال الطبيعية وصفاً مضبوطاً، لأن الأشكال والأجسام في الطبيعة معظمها غير مضبوطة، بل لها أشكال هندسية معقدة، فتساعد خصائص هندسة الفركتال في تحديد وصف مضبوط لها.
- ربط الرياضيات بالأشياء في البيئة المحيطة بهم، وذلك من خلال تطبيقات هندسة الفركتال على مجالات عديدة في فهم أشكال الخلية سواء النباتية أو الحيوانية في الأحياء ومكونات وتراكيب الصخور في علوم الأرض وكذلك في علم الهندسة.
- فهم الرياضيات ذاتها، وذلك من خلال فهم العمليات التكرارية حيث الحاجة إلى الحسابات الرياضية فيها.
- إكساب التلاميذ مهارات الاكتشاف في الرياضيات من خلال مهارات ربط الأشكال في الطبيعة بالخصائص الرياضية لهندسة الفركتال.
- تعرُّف مكونات منظور هندسي جديد غير مألوف في محتوى الرياضيات.
- تنمية تذوق الجوانب الجمالية في الرياضيات.

ولهذا أوصت العديد من الدراسات إلى ضرورة تضمين موضوعات من هندسة الفركتال فى مختلف المراحل التعليمية. ومنها دراسة Langille & Michael (1997)، ودراسة Makee (1997)، ودراسة Vacc (1992).

كما أشار وليم تاوضروس عبيد (١٩٩٨، ص٥) إلى أن تدريس هندسة الفركتال يشكل التوجهات العامة لتعليم الرياضيات في المستقبل، ويذكر أن عالم الهندسة المتواجدة في عالم الحقيقية يتطلب ترييضاً من خلال هندسة حدسية وهندسة تحويلية وهندسة استدلالية وهندسة تحليلية، وهندسة اتجاهية، وإضافة خصائص توبولوجية والتعرف والتعامل مع أنماط هندسية تتكون من إيقاعات تكرارية لوحدات هندسية صغيرة، وأن ذلك لا يتأتى إلا من خلال موضوعات هندسة الفركتال.

وتشير نظلة حسن خضر (٢٠٠٤أ، ص ١٧٢) إلى أن الاتجاهات المعاصرة التى ينادى بها الرياضيون التربويون فى تدريس الرياضيات للقرن الواحد والعشرين هو التوصل إلى طرق مجددة تجعل الرياضيات أكثر حيوية وأكثر معلوماتية وأكثر واقعية وأكثر حداثة. ويمكن تحقيق ذلك كله من خلال تدريس موضوعات من هندسة الفركتال.

ويذكر رضا أبو علوان السيد (٢٠٠١، ص ١١٢) أنه لا تخلو برامج إعداد معلمى الرياضيات فى العديد من معاهد التربية فى استراليا أمريكا ودول أوروبية من تضمين برامجها بمقرر فى هندسة الفركتال. وهذا ما نفتقده فى برامج إعداد معلم الرياضيات فى الدول العربية، مؤكداً على أن أهمية تدريس هندسة الفركتال تكمن فى كونها تساعد المتعلمين فى:

- رسم الأشياء الطبيعية من الواقع على شاشات الكمبيوتر.
- تعلم مزج الفنون مع الرياضيات، فتتحول المعادلات من مجرد أرقام أو رموز إلى أشكال ورسومات.
- وصف الظواهر الجوية. وموضوعات ترتبط بالبيئة والفلك.
- تقديم حلول بسيطة للتوصل إلى التفاصيل الدقيقة فى الأشياء الكبيرة والمعقدة مثل السحب والمناظر الطبيعية.

ويرى Naylor (1999,p363)، أن أهمية تدريس موضوعات من هندسة الفركتال يتمثل فى أنها تفجر طاقات الابتكار والخيال عند المتعلمين، ويعتبر تدريسها ذو أهمية كبيرة في إثراء وتنمية تفكير المتعلمين الذي يعتبر من أهم أهداف تعليم الرياضيات.

وفى هذا الصدد يرى وليم تاوضروس عبيد وآخرون (٢٠٠٠، ص٣٥) ونظلة حسن خضر (٢٠٠٤أ، ص٥٢) أنه يمكن تنمية تذوق جمال الرياضيات وجعل تفكير المعلم تفكيراً ابتكارياً عن طريق الاهتمام بدراسة الطلاب المعلمين لبعض موضوعات الرياضيات العصرية مثل هندسة الفركتال.

ولعل السبب فى الاهتمام بهندسة الفركتال يرجع إلى ما تحتويه هذه الهندسة من أشكال هندسية بديعة تحاكى الطبيعة. كما أن أشكالها المختلفة تتمتع بخصائص فريدة منها خاصية التشابه الذاتى لأي شكل من أشكالها، وخاصية البعد الفركتالى. إن مثل هذه الخصائص لا تتمتع بها أشكال الهندسات الأخرى كالهندسة الإقليدية أو التحليلية أو الفراغية.

ثانياً: التفكير الإبتكارى

إن أهم ما يميز الإنسان عن سائر المخلوقات هو القدرة على التفكير. ولذا كان من أهم واجبات المؤسسات التربوية هو تنمية التفكير لدى الفرد؛ ليكون أكثر قدرة على حل مشكلاته ومن ثم يستطيع بسهولة أن يواجه متطلبات الحياة على المستوى القريب والبعيد.

فالتفكير يحتل دورا مهماً فى عملية التعليم والتعلم، فلم يعد الهدف من العملية التعليمية قاصراً على إكساب المتعلم المعارف والمهارات الأساسية. بل يجب أن يتعدى هذا الهدف إلى تنمية قدرات المتعلمين على أنماط التفكير المختلفة. (سوسن محمد موافى، ٢٠٠٣، ص٣٦٢)

وتمثل العملية الإبتكارية واستثارة الأفكار الجديدة الأمل للمجتمعات التي تطمح في الوصول إلى مركز مرموق على الصعيد الدولي. والأكثر من ذلك ما أكده **Tuenpi**، بأن تهيئة الفرص لنمو القدرات الإبتكارية يعد مسألة حياة أو موت بالنسبة لأي مجتمع من المجتمعات، خاصة المجتمعات النامية ومنها البلاد العربية التي تسعى لسد الفجوة الكبيرة التي تفصلها عن الدول المتقدمة .(رفيقة سليم حمود، ١٩٩٥، ص٥٩)

وفى هذا الصدد يؤكد حسام الدين محمد مازن (٢٠٠٠، ص٨١) على ضرورة تنمية العقول المبتكرة القادرة على مواجهة التحديات العالمية والمحلية فى شتى مجالات الحياة. والقادرة على حل المشكلات التى تنتج عن مواجهة هذه التحديات.

وقد أوصت دراسة محمود سيد أبوناجى (٢٠٠٠) بضرورة الاهتمام بتنمية قدرات التفكير الإبتكارى لدى الطلاب المعلمين فى كليات التربية من خلال التدريب على المواقف الغنية بالمثيرات المناسبة لاستثارة السلوك الإبتكارى؛ مما ينعكس أثره على تلاميذهم فى المستقبل.

ذلك لأنه لكى نُعد التلاميذ إعداداً يؤهلهم لتنمية قدرات التفكير الابتكارى؛ فلابد من التركيز على المعلمين أنفسهم، وهذا ما أكدته دراسة **Eunice (1990)**، ودراسة **Narramora (1993)**، بأن امتلاك المعلم لقدرات التفكير الإبتكارى يؤثر إيجاباً فى تنمية هذه القدرات لدى تلاميذه.

وكان من بين ما ورد فى مؤتمر المعلمين العرب لتدريس الرياضيات الحديثة. أن تنمية القدرة على الابتكار يعد من أهم الأهداف التى يهدف تدريس الرياضيات إلى تحقيقها فى مختلف المراحل الدراسية من رياض الأطفال وحتى المرحلة الجامعية. (نظلة حسن خضر ،٢٠٠٤ب،ص ١٦)

(١) ماهية التفكير الإبتكارى

ورد في معجم مصطلحات التربية والتعليم تعريف الابتكار بأنه عملية ينتج عنها عمل جديد يرضي جماعة ما. يتميز بالانحراف عن الاتجاه الأصلي، والانشقاق عن التسلسل العادي في التفكير إلى تفكير مخالف. (سهير عبد اللطيف أبو العلا، ٢٠٠٢، ص١٨٣)

وعموماً فقد ظهر العديد من تعريفات التفكير الإبتكارى،كل منها يُعرفه من وجهة نظر معينة. ويمكن حصر أهم هذه التعريفات فى فئات ثلاثة هى التفكير الإبتكارى كناتج، والتفكير الإبتكارى كعملية، والتفكير الإبتكارى كمجموعة من القدرات العقلية. ويمكن توضيح ذلك كما يلى:

أ- التفكير الإبتكارى كناتج.

ينظر أصحاب هذا الاتجاه إلى التفكير الإبتكارى في ضوء الناتج الذي يقدمه الشخص المبتكر. وظهرت عدة تعريفات للتفكير الإبتكارى على هذا الأساس منها:

تعريف التفكير الإبتكارى على أنه "القدرة أو الاستعداد على إنتاج شئ ما جميل، وذى قيمة". (محمد إبراهيم المنوفى، ١٩٩٥، ص٢١١)

وعرفه أحمد حسين اللقانى، وعلى أحمد الجمل (٢٠٠٣، ص٣) بأنه: "قدرة الطلاب على الإتيان بحلول جديدة للمشكلة والمواقف التى تواجههم، وإن كانت عناصرها موجودة فى الموقف التعليمي ومعروفة لدى المعلمين. ولكنها غير معروفة لدى الطلاب أنفسهم".

وترى كوثر عبد الرحيم شهاب (٢٠٠٠، ص٩٧) أن التفكير الإبتكارى هو: "التفكير فيما وراء الأشياء المألوفة أو الواضحة، وينتج عنه إضافة أفكار وحلول جديدة تؤدي إلى إنتاج جديد".

وأوضحت صفاء يوسف الأعسر (٢٠٠٠، ص١٤) أن التفكير الإبتكارى هو: "العملية الخاصة بتوليد منتج فريد وجديد بإحداث تحول من منتج قائم، هذا المنتج يجب أن يكون فريداً بالنسبة للمبتكر، كما يجب أن يحقق محك القيمة والفائدة والهدف الذي وضعه المبتكر".

يتضح من التعريفات السابقة أن الابتكار يعنى التوصل إلى شئ جديد نافع ومفيد وقد يظهر هذا الإنتاج على شكل نظرية أو حل لمشكلة ما، أو على شكل اكتشاف جديد.

ب- التفكير الإبتكارى كعملية

يرى جيلفورد أن التفكير الإبتكارى: "عملية عقلية معرفية، أو نمط من التفكير التباعدي يتصف بالطلاقة والمرونة والأصالة والحساسية للمشكلات وينتج عنه ناتج إبتكاري. (فتحي مصطفى الزيات، ١٩٩٥، ص ٤٩٥).

ويرى تورانس أن التفكير الإبتكارى هو: "عملية إدراك الثغرات والعناصر المفقودة، وتكوين الأفكار، وفرض الفروض حولها، واختبار هذه الفروض، وربط النتائج، وإجراء ما يتطلبه الموقف من تعديلات أو إعادة اختبار الفروض، وأخيراً إيصال النتائج إلى الآخرين". (محمد إبراهيم عيد، ٢٠٠٢، ص١٥٥)

وعرفه فتحى عبد الرحمن جروان (٢٠٠٢، ص ٤٣) بأنه: "نشاط عقلى مركب وهادف توجهه رغبة قوية فى البحث عن حلول أو التوصل إلى نتائج أصيلة لموقف معين أو مشكلة مطروحة".

وعرفه مجدى عزيز إبراهيم (٢٠٠٥، ص٢٥٨) بأنه: "العملية التى ينتج عنها حلول أو أفكار تخرج عن الإطار المعرفى للفرد سواء بالنسبة للمعلومات التى يفكر فيها، أو للمعلومات السائدة فى البيئة، وذلك بهدف ظهور الجديد من الأفكار".

وتشير هذه التعريفات إلى أن التفكير الإبتكارى يُعد نوعاً من سلوك حل المشكلة ولكنه يختلف عن عملية حل المشكلة فى نوع المشكلة وضرورة توافر عناصر الجدة والتنوع والأصالة في إصدار الحلول. كما أن هذا النوع من التعريفات يركز على العمليات العقلية التى تقف وراء ما يتوصل إليه الشخص المبتكر من إنتاج فريد.

ج- التفكير الإبتكارى كمجموعة من القدرات العقلية.

عرفه محمود عبد الحليم منسى (١٩٩٣،ص ٢٩) بأنه: "القدرة على إنتاج أشياء جديدة من عناصر قديمة تتميز بالطلاقة والمرونة والأصالة".

كما عرفه محمد على حسن (١٩٩٥،ص١٦) بأنه: "نوع من المرونة والأصالة والطلاقة التى تجعل المفكر قادراً على تغير طرق تفكيره المألوفة إلى طرق أخرى ذات إنتاج تتابعى".

ويلاحظ مما سبق أن الناتج الذي يقدمه الشخص المبتكر لا يبرز فجأة، ولكن يسبقه العديد من العمليات العقلية التي تحدث داخل عقل الشخص. تمهيداً للوصول لإنتاج أكبر عدد ممكن من الحلول أو الأفكار المتعلقة بموضوع ما، تتسم بالتنوع والحداثة.

(٢) مكونات التفكير الإبتكارى.

تشير أدبيات علم النفس إلى أن التفكير الإبتكارى ليس قدرة واحدة، ولكنه يتكون من مجموعة من القدرات العقلية، التي يجب توافرها لدى الفرد حتى يصبح قادراً على ممارسة التفكير الإبتكارى، ويعرف هذا النوع من القدرات العقلية بالقدرات الإبتكارية. وتتعدد القدرات لتشمل (الطلاقة والمرونة والأصالة وإدراك التفاصيل والتصور البصرى والحساسية للمشكلات والتقويم).

أ- الطلاقة :

إن الطلاقة تركز على كم الاستجابات وليس نوعها. ويشير كل من أحمد عبد اللطيف عبادة (١٩٩٥، ص١٨)، محمد محمود محمد (١٩٩٦، ص١٣) أن الطلاقة لها مكونات فرعية هي:

- **الطلاقة اللفظية:** وهى القدرة على إنتاج أكبر عدد ممكن من المفاهيم والمصطلحات التى تستوفى شروط معينة فى زمن محدد.
- **الطلاقة الفكرية:** وهى القدرة على استدعاء أكبر قدر من الاستجابات المناسبة لمشكلة أو موقف مثير فى فترة زمنية محددة.
- **الطلاقة الشكلية:** وهى القدرة على إنتاج عدة أشكال من شكل معطى تحت شروط معينة فى فترة زمنية محددة.

ب- المرونة :

وتعني القدرة على إنتاج أفكار متنوعة ومختلفة وترتبط بموقف معين. كما أنها تعني قدرة الفرد على تغيير وجهة نظره للمشكلة التي يعالجها وذلك بالنظر إلى زواياها المختلفة (زكريا الشربيني، يسرية صادق، ٢٠٠٢، ص١١٦). وعلى ذلك فإن المرونة تركز على مدى تنوع الاستجابات، وهي بذلك عكس الجمود أو التصلب.

وتتضمن المرونة ثلاث قدرات فرعية هى المرونة التلقائية، والمرونة الشكلية. والمرونة التكيفية.

- **المرونة التلقائية :** وهى قدرة الفرد على تغيير مجرى تفكيره فى اتجاهات جديدة لإنتاج أكبر عدد ممكن من الأفكار فى سهولة ويسر وحرية بدون توجيه نحو حل معين. (خليل ميخائيل معوض، ٢٠٠٣، ص٣٣٤)
- **المرونة الشكلية:** وهى القدرة على تغيير وضع الأشكال لإعطاء حلول متنوعة للموقف أو المثير. (محمد على حسن، ١٩٩٥ ، ص١٧)

- **المرونة التكيفية:** وهى قدرة الفرد على التحول من وجهة نظر إلى أخرى بسهولة وسرعة. أى أنها تعنى تغيير سلوك الفرد إلى سلوك جديد يوصله إلى النتيجة الصحيحة.
(محمد جهاد جمل وزيد الهويدى، ٢٠٠٣، ص ٩٠)

ومما سبق يتبين أن الطلاقة ترتبط بعدد الاستجابات التى يصدرها الفرد تجاه موقف ما فى زمن ما. أما المرونة فتحدد بنوعية الأفكار المتضمنة بهذه الاستجابات.

جـ- الأصالة:

أهم قدرة من قدرات التفكير الإبتكارى، وتبدو فى أى إنتاج جديد وأصيل وغير شائع، والأصالة أمر نسبى يتحدد فى ضوء ما هو معروف ومتداول بين أفراد جماعة معينة فى زمن معين، بحيث تتقبله الجماعة وتشعر نحوه بالتقدير، وتقاس الأصالة من خلال ثلاثة محكات هى محك عدم الشيوع ومحك المهارة أو الإتقان ثم محك التداعيات البعيدة. (فتحى مصطفى الزيات، ١٩٩٥، ص٥١٢).

وعلى ذلك فإن الفرد الذي يمتلك هذه القدرة، تكون أفكاره متمايزة ومتميزة وذات طابع جديد ومنفرد عن أفكار الآخرين.

د- إدراك التفاصيل:

ويقصد بهذه القدرة أنها تكملة بناء من نواحيه المختلفة على أساس من المعلومات المعطاة، حتى يصير أكثر تفصيلاً، أو العمل على امتداده في اتجاهات جديدة، وتقدر التفاصيل بما يقدمه الفرد من تحسينات وإضافات على الفكرة الأساسية (زكريا الشربيني، يسرية صادق، ٢٠٠٢، ص١٢١).

هـ- التصور البصرى:

ويتمثل فى قدرة الفرد على المعالجة العقلية للأفكار والتوليف بينها بحيث ينظمها بصورة جديدة للتغلب على مشكلة أو مواجهة موقف مثير. (عصام الدسوقى اسماعيل ، السيد عبد الدايم عبد السلام، ٢٠٠٣، ص٣٠١)

و- الحساسية للمشكلات:

وتتمثل فى قدرة الفرد على رؤية المشكلات غير النمطية وحلها. تظهر هذه القدرة غالباً في شكل وعي بالنقائض أو العيوب في الأشياء أو المواقف، مما يؤدي إلى الإحساس بالحاجة إلى التغيير أو إلى إجراء ممارسات أو حيل جديدة. (زينب أحمد عبد الغنى، ١٩٩٩،ص ١٢٨).

ز- التقويم:

تشير هذه القدرة إلى مدى سرعة الفرد في الحكم على الأشياء التي سبق له إدراكها بوضوح وتتطلب إعادة النظر فيما تم التوصل إليه من إنتاج إبتكارى، وذلك في ضوء معيار أو محك الملاءمة، أو ميزان الجودة (حسن أحمد عيسى، ١٩٩٤، ص٥٨).

وتأسيساً على ما سبق تُعرِّف الدراسة الحالية التفكير الإبتكارى بأنه: إنتاج الطالب المعلم لأفكار متجددة ومبتكرة (الطلاقة) تتسم بالتنوع والاختلاف (المرونة) الغير متكرر (الأصالة) ويتمثل ذلك فى الدرجة التى يحصل عليها فى الاختبار المُعد لذلك.

(٣)مراحل العملية الإبتكارية.

تمر العملية الإبتكارية بمراحل أربعة: (زكريا الشربيني، يسرية صادق، ٢٠٠٢، ص١٠٨؛ فتحي مصطفى الزيات، ١٩٩٥، ص٥١٥؛ زينب أحمد عبد الغنى، ١٩٩٩،ص١٣٠) هى:

أ – مرحلة الإعداد أو التحضير Preparation :

وتمثل هذه المرحلة الطور التحضيري لعملية الابتكار، ويتم خلالها تجميع المعلومات المتعلقة بالمشكلة، ثم هضم هذه المعلومات واستيعابها وتمثلها وإدراك العلاقات بينها، وتحليل المشكلة إلى عواملها، والتجول الحر عبر محددات المشكلة، والبحث عن إمكانية توظيف المعلومات المتاحة والمشتقة أو المستنتجة لحلها.

وعلى ذلك فإن هذه المرحلة تتضمن البحث الدقيق في جميع جوانب المشكلة، وتمثل البذرة الأساسية لعملية للابتكار، ويظهر فيها استثارة وتحدى لقدرات الفرد الذي يشعر بنوع من عدم التوازن المعرفي والانفعالي.

ب – مرحلة الكمون أو الاحتضان Incubation :

وهي حالة من القلق والخوف اللاشعوري والتردد بالقيام بالعمل والبحث عن الحلول، وهي أصعب مراحل التفكير الإبتكارى. ويتم في هذه المرحلة حضانة الأفكار والمعلومات المتعلقة بالمشكلة، حيث يترك الفرد المشكلة لفترة من الزمن قد تطول أو تقصر، يظل تفكير الفرد موصلاً باللاوعي فتنصهر المعلومات، وتختمر الأفكار، وتنمو بعض الإرهاصات الفكرية، ويحدث نوع من التهيؤ الشعوري، نتيجة تخفيف الضغط على ذاكرة الفرد.

ويتضح من ذلك أن الفرد في هذه المرحلة يبدوا ظاهرياً أنه لا يفكر في المشكلة التي بين يديه، ويدعها جانباً، مع أن العقل يستمر في التفكير فيها على مستوى اللاشعور أو اللاوعي.

ج – مرحلة الإشراق الذهني illumination:

وهي الحالة التي تحدث بها الومضة التي تؤدي إلى فكرة الحل والخروج من المأزق، وهذه الحالة لا يمكن تحديدها مسبقاً فهي تحدث في وقت ما، في مكان ما، وربما تلعب الظروف المكانية والزمنية والبيئة المحيطة دوراً في تحريك هذه الحالة، ووصفها الكثيرون بلحظة الإلهام.

وتسمى هذه المرحلة أيضاً بشرارة الابتكار أو اللحظة الإبتكارية، ويبلغ الفرد خلالها ذروة العملية الإبتكارية، حيث تظهر الفكرة فجأة، وتبدو فكرة الحل وكأنها قد نظمت تلقائياً، ويبدو واضحاً ما كان غامضاً ومبهماً. وفي هذه المرحلة تتلاشى الكثير من التداخلات التي تعوق تقدم الفرد نحو الحل، وتتداعى الأفكار ويقفز الحل إلى إدراك الفرد ووعيه، وتبدو هناك إمكانية إعادة صياغة وتنظيم المعلومات والأفكار

ومعطيات الموقف المشكل بصورة جديدة في مواقعها الصحيحة تماماً، ويشعر الفرد بأقل قدر ممكن من الجهد والعناء، وأكبر قدر ممكن من التوازن المعرفي والنفسي.

د- مرحلة التثبت verification:

ويتم في هذه المرحلة تجريب الحل واختباره والتثبت من صحته، والتحقق من فائدته وكفاءته وعلى ذلك فإن هذه المرحلة تمثل تقويماً لما تم التوصل إليه من حلول للموقف المشكل خلال المراحل السابقة.

ويرى " محمد جهاد جمل، وزيد الهويدى (٢٠٠٣، ص ص:٩٦-٩٧) أن مراحل العملية الإبتكارية ليست متسلسلة بهذه السهولة بهذا الشكل وهذه الخطوات ليست جامدة. وليس من الضروري إتباعها بنفس التسلسل. فالموقف الإبتكارى موقفاً متكامل. والتقسيم أو التجزئة من أجل التبسيط وتوضيح العملية الإبتكارية.

ويرى الباحث أن تقسيم العملية الإبتكارية إلى مراحل متسلسلة يُعد تقسيماً مصطنع، فالتفكير الابتكارى إنما هو تفكير متداخل وفعل متكامل يؤثر ويتأثر بالعديد من العوامل العقلية والانفعالية للفرد. وكذلك العوامل البيئية المحيطة به.

(٤) التفكير الابتكارى وهندسة الفركتال.

يُعد تنمية التفكير الإبتكارى هدفاً من الأهداف العامة للتربية، وقد انعكست أهمية التفكير الابتكارى في التربية على أهداف التعليم في المرحلة الجامعية. ويؤكد عبد الحليم محمود السيد (٢٠٠١، ص٣٣٢) على أهمية تنمية قدرات التفكير الإبتكارى لدى طلبة الجامعة مما يمكن الخريجين من مواكبة التغيرات المتلاحقة في مختلف جوانب الحياة.

وتشير بعض الأدبيات ومنها، (Bernsely,1998 ؛ Thoomas,2002؛ نظلة حسن خضر، ٢٠٠٤أ؛ وفاء مصطفى كفافى، ٢٠٠٤) الى أن هندسة الفركتال تضم الكثير من جوانب التعلم التى يمكن أن تسهم فى تنمية التفكير الإبتكارى لدى المتعلمين من خلال:

- **أ- تقديم تعلم أكثر دافعية:** وذلك لاعتمادها على تكنولوجيات متنوعة فى عرض محتواها والأمثلة الخاصة بها. وتساعد هذه التكنولوجيات (الكمبيوتر . شبكة الانترنت) على البحث والاكتشاف للمفاهيم المختلفة لهندسة الفركتال، والتعرف على الإجراءات المتنوعة لتوليد الفركتالات المختلفة بأكثر من طريقة والتحقق منها فى سياقات علمية مختلفة، مما يساعد فى تنمية التفكير الإبتكارى.
- **ب- تنمية حب الاستطلاع:** تضم هندسة الفركتال عناصر هندسية مثيرة تنمى حب الاستطلاع، حيث يمكن استخدام قواعد وتحويلات بسيطة لإنتاج وتوليد فركتالات مختلفة مدهشة. كما يمكن توليد العديد من الفركتالات المختلفة فى الشكل النهائى والتى لها نفس الخصائص، بتطبيق نفس الإجراء (المولد) على أشكال هندسية متنوعة.

ج – تنمية الشعور بحيوية الرياضيات: التغيرات البسيطة فى مرحلة توليد الفركتال تقود إلى تركيبات غير متوقعة. وبذلك فهى تفتن وتسحر المتعلمين. ويعد ذلك بمثابة دافع للمتعلمين فى تعلم المزيد عن هذا النوع من الهندسات الذى ينمى لديهم الشعور بأن مادة الرياضيات أكثر حياة.

د – استثارة البحث والاستقصاء: من خلال فحص مكونات الأشكال الفركتالية وربطها بأشكال فى الطبيعة. وبالتالى تساعد فى تفجير طاقات الإبداع والخيال لدى المتعلمين.

هـ - تقديم تعلم أكثر متعة واثارة: إن معايشة المتعلم و إدراكه لمراحل تكوين الفركتال خطوة خطوة يضفى جاذبية غير متوقعة لعملية التعلم. وقد ذكر بعض الطلاب الذين درسوها أنها تحقق لديهم متعة وإثارة لا يمكن وصفها.

و –تنمية الحدس والحس المكانى: عن طريق دراسة وتحليل صور الفركتالات ومحاولة تخمين واستنتاج الأشكال المختلفة المتولدة بالمولدات المختلفة.

ز –تنمية القدرة على الاكتشاف: إن هندسة الفركتال وما تتضمنه من فركتالات مختلفة؛ تساعد فى تنمية القدرة على الاكتشاف من خلال تقديم النماذج والتمثيلات البصرية. وقيام المتعلمين بفحصها واكتشاف نمط تكوينها. والوصول إلى نهايات متنوعة مختلفة غير متوقعة. وهذا بدوره يساعد على تنمية الابتكار.

ح – تقديم تعلم مبنى على تقدير الجمال: تقدم الفركتالات المتنوعة رؤية ساحرة تبهر العقل بجمالها من خلال التوليدات المتكررة للأشكال المتشابهة، فهذه الهندسة لها جاذبية ساحرة محيرة تثير التفكير الخلاق. فهى تمس الإحساس والوجدان وتشبع العقل وتثير الخيال. فهى بهذا تعمل على تكامل الإحساس مع الفكر. وهذا بدوره ينمى العقلية الإبتكارية المبدعة.

ثالثاً: تذوق جمال الرياضيات.

إن الحياة بدون إحساس بالجمال حياة رتيبة ومملة. وهنا يصبح للجمال قيمة روحية كبيرة فى الحياة. فلو أن النظرة للواقع تحولت إلى نظرة نفعية فقط؛ لصارت الحياة مادية رتيبة تحكمت فيها الآلية والوظيفية وسادها الجمود.

ومن هنا يمكن القول بأننا فى حاجة ماسة إلى تنمية الإحساس بالجمال وتذوقه. مما يسهم فى تقدم مجتمعاتنا التى غشيتها مسحة صناعية آلية نتيجة التقدم العلمى الهائل الذى كان نتيجته إهمال تنمية التذوق الجمالى.

وبما أن العلم الحديث يتسم بالتخصص الدقيق فلابد أن يهتم القائمين على كل تخصص بضرورة تنمية الإحساس بالجمال، وكشف النقاب عن نواحى العلم الجمالية، وغرس قيمه الجمالية فى نفوس دارسيه لما فى ذلك من أثر بالغ الأهمية لديهم.

ففى مجال الرياضيات مثلاً يقول "بيرى" أن دراسة الرياضيات بدأت لأنها مفيدة وكذلك تستمر لفائدتها. إلا أن الرياضيين الذين يدرسونها لذاتها يجمِّدونها. كما يقول عالم الرياضيات "فيرجسون" إننا كعلماء نرى جمال الرياضيات بعقولنا ولابد أن نبين جمالها للغير. (نظلة حسن خضر،٢٠٠٤أ،ص٢٣)

وقد أوضحت Brinkmann أن تعليم الرياضيات فى عالم اليوم يحتاج أن يأخذ فى الاعتبار البعد الجمالى أكثر مما تم حتى الآن. كما ترى ضرورة تقديم الرياضيات للطلاب بطريقة تجعلهم يتذوقون جمال الموضوع الرياضى. (جمال حامد محمد،٢٠٠٧،ص١٣٢)

(١) ماهية التذوق الجمالى:

أ- تعريف التذوق:

التذوق هو القدرة على الاستجابة للمؤثرات الجمالية استجابة تجعل مشاعر الشخص تهتز لها وتجعله يعيش معها، ويستمتع بها، ويجعلها جزءاً من حياته، ورصيداً يزداد على مر الزمن. (محمود البسيونى، ١٩٨٩، ص٥٨)

ويتفق سعودى عبد الظاهر سيد (١٩٩٩،ص ١٧١) مع " محمود البسيونى فيعرفه بأنه: اهتزاز الشعور فى المواقف التى تتوافر فيها العلاقات الجميلة. والتى تجعل الإنسان يحس بالمتعة والارتياح أو لا تتوافر فيها العلاقات الجميلة فيحس بالقبح والنفور.

أما محمد راتب الحلاق (٢٠٠٠، ص ١٢٩) فيعرفه بأنه: حسن تلقى الأشياء الجميلة والقدرة على تحسس القيم الجمالية الكامنة فى تلك الأشياء والأفعال.

ب- تعريف الجمال:

يعرف الجمال بأنه: "الشعور الذى تثيره الأشكال الفنية فى النفس. فإذا كان الفن هو صنع الأشياء الممتعة. فالجمال هو الشعور الذى تثيره هذه الأشكال". (سعودى عبد الظاهر سيد، ١٩٩٩،ص ١٧١)

ويرى محمد إبراهيم المنوفى (١٩٩٥، ص١٨٦) أن الجمال: "يتمثل فى إدراك العلاقة المريحة التى يستجيب لها الإنسان فى شتى العناصر سواء كانت متوافرة فى الطبيعة أو من صنع الفنان".

وتعرفه أميرة حلمى مطر (٢٠٠٠، ص١٠٥) على أنه : "الشئ الذى يبهج عالمنا دون سابق تفكير".

ج- تعريف التذوق الجمالى:

التذوق الجمالى يتضمن القدرة على التميز بين الحسن والمتوسط في الحسن والسيئ فى الأشياء التى يصنعها الإنسان وفق معايير محددة. (محمود البسيونى، ١٩٨٩، ص٥٨)

ويرى شاكر عبد الحميد (٢٠٠١، ص ص ١٥٨-١٦٢) أن التذوق الجمالى ما هو إلا: "نمط مركب من السلوك يتطلب فى جوهرة إصدار أحكام على قيمه شيء أو موضوع أو فكرة من الناحية الجمالية". كما يرى أيضا أن دراسة هذا السلوك تتطلب تحليله إلى مكوناته و التى ميز فيها بين ثلاث عمليات هى:

- **الحساسية الجمالية:** وهى استجابة الفرد للمثيرات الجمالية ،استجابة تتفق مع مستوى محدد من مستويات الجودة فى الفن.
- **الحكم الجمالى**: وهو درجه الاتفاق بين الحكم الذى يصدره المفحوص على العمل الفنى وأحكام الخبراء فى الفن .
- **التفضيل الجمالى:** وهو نوع من الاتجاه الجمالى الذى يتمثل فى نزعه سلوكية عامه لدى الفرد تجعله يقبل على فئة معينة أو يتجنب فئة معينه من أعمال الفن دون غيرها.

وتأسيساً على ما سبق يستخلص الباحث أن عملية التذوق هى حالة شعورية داخلية تنتاب الفرد حال تعرضه لموقف ما، تتضمن القبول و النفور، أو الارتياح وعدم الارتياح، أو المتعة والتأفف (الإقدام والإحجام). أما الجمال فيختص بالجانب الإيجابي من التذوق. فهو قيمه تجعل صاحبها يشعر بالحسن فيما يراه فى الموقف من أشياء وعلاقات تستحوذ على مشاعره بما يوجد فيها من سمات جمالية. ويتضمن التذوق الجمالى استجابة الفرد لمثيرات الموقف ومن ثم إصدار حكماً على قيمة هذا الموقف من الناحية الجمالية، يرتب عليه قبول أو رفض الموقف.

د- تعريف التذوق الجمالى للرياضيات:

عرفه Sinclair (2004, p263)، بأنه قدرة الفرد على إيجاد الروابط التي تسمح بربط التفكير الرياضي المجرد بالواقع والأحاسيس، ونقل و شرح الأفكار الرياضية وجعلها قابلة للإحساس والتذوق.

كما عرفه جمال حامد محمد (٢٠٠٧، ص٢) بأنه استخدام معيار أو أكثر من معايير جمال الرياضيات (البساطة، النظام، والمنطقية، والتركيب، والتوازن) فى المقارنة بين جماليات مواقف رياضية ومن ثم تحديد الموقف الأجمل من وجهة نظر الفرد.

وتعرفه الدراسة الحالية بأنه النشاط الايجابي الذي يقوم به الطالب المعلم تأثراً بنواحي الجمال فى موقف رياضي ما. بعد تفاعله معه عقلياً ووجدانياً على نحو يستطيع به تقديره والحكم عليه. ويتمثل ذلك فى الدرجة التى يحصل عليها فى الاختبار المُعد لذلك.

(٢)نظريات تفسير الجمال.

هناك عدة نظريات تفسر الجمال (جمال أبو الوفا، صلاح الدين محمد توفيق ،١٩٩٣،ص٢٠١؛ جمال حامد محمد، ٢٠٠٧، ص ١٤٣) يمكن حصرها فيما يلى:

أ- النظرية الذاتية: (الموقف الذاتي)

يرى أصحاب هذا الرأى– أصحاب النظرية القديمة– أن الجمال وعناصره ترجع إلى قوانين العقل البشرى، وليس صفة فى الشيء تقوم بمعزل عن إدراكنا لها، أى أن الجمال صفة ذاتية يتوقف الشعور بها على حالتنا النفسية فظاهرة غروب الشمس مثلاً يراها عدد كبير من الناس كل يوم، ولكن البعض القليل منهم يحس بجمال هذه الظاهرة، فى حين يحس البعض الأخر بأنها ظاهرة موحشة حزينة وقد لا ينتبه إليها الآخرون وهذا الموقف ينظر إلى الجمال علي إنه إنساني أو ذاتى.

ب – النظرية الموضوعية: (الموقف الموضوعي)

ويرى أصحاب هذا الموقف أن الجمال صفة عينية حالة فى الشيء الجميل تلازمه وتقوم فيه سواء وجد عقل يقوم بإدراك هذه الصفة وتذوقها أم لا.

ج – النظرية الموضوعية الذاتية: (الموقف الموضوعي الذاتي)

يري أصحاب هذا الموقف أن الجمال هو علاقة بين الشيء الجميل والعقل الذي يدركه.

ويتفق الباحث مع أصحاب النظرية الثالثة حيث لابد من وجود الشيء الجميل واستعداد لدى الإنسان لتذوق جمال هذا الشيء. ويتوقف هذا التذوق على عاملين هما حالة الفرد النفسية، وموضوع الجمال ذاته.

(٣)أهميه التذوق الجمالى للرياضيات.

إن تربية الجمال وغرسه فى نفوس المتعلمين ليس مسؤولية تخصص بعينه. ومن الخطأ أن يعتقد البعض أنه مسؤولية مناهج التربية الفنية أو الموسيقية؛ فالجمال معناه أشمل من أن يستحوذ عليه تخصص بعينه. فهو مسؤولية كل التخصصات على اختلاف محتوياتها. وأى تخصص يغفل أو لا يهتم بإثارة الإحساس بالجمال وتذوقه قد يتحول إلى تخصص جاف مجرد.

والرياضيات كفرع من أفرع العلوم المختلفة مملوءة بنواحى الجمال سواء فى علاقاتها وبنيتها أو فى أشكالها ورسوماتها. وأبرز مثال على ذلك تلك النزعات الجمالية التى نلاحظها فى التصميمات الهندسية العربية للمبانى ودور العبادة. وهى أشياء محسوسة وملموسة لا تقل روعةً وجمالاً عن تلك العلاقات والمبادئ، والقوانين الرياضية فى تسلسلها وبنائها وتماسكها وهو أمر يدعو الدارس إلى الاستمتاع والتأمل العقلى. (أحمد أبو العباس، محمد على العطرونى، د.ت، ص١٠٢)

ويعنى هذا أن الرياضيات تشبع ناحيتي الاستمتاع الحسى الخارجى المنظور والاستمتاع العقلى الداخلى. فالأشكال الهندسية التى تملأ الحياة المحيطة تعتبر مجالاً خصباً لتنمية التذوق الجمالى للرياضيات. وكذلك العلاقات الرياضية والبراهين والبنى الرياضية لا تقل أهمية فى تنمية التذوق الجمالى.

وقد يظن البعض أن مسألة التذوق الجمالى مسألة فطرية موروثة ولا تحتاج إلى رعاية أو تربية. وهذا الاعتقاد يشوبه بعض القصور. لأن تربية وتنمية التذوق الجمالى أحد أهداف تدريس الرياضيات مثلاً ولا يقل أهمية عن بقية أهدافها.

ويتفق معظم المهتمين بتدريس الرياضيات، على أهمية الإسهام فى اكتساب القدرة على تذوق الجمال الرياضي والإحساس به، كأحد أهداف المجال الوجداني التى يجب أن يهتم بها تدريس الرياضيات. لما له من دور وأهمية فى تعلم المادة وتحقيق أهدافها الأخرى. (نظلة حسن خضر،٢٠٠٤ب، ص٦٤؛ جمال حامد محمد،٢٠٠٧، ص١٣٠)

ويشير محمد سويلم البسيونى (١٩٩٢، ص٢١٤) إلى أن اكتساب القدرة على التذوق وتقدير النواحى الجمالية فى الرياضيات من أهم أهداف المجال الوجدانى. ذلك لأنه يسهم بدوره فى تحقيق أهداف وجدانية أخرى ومنها: إدراك دور الرياضيات فى الحياة العملية وفى التقدم العلمى والتكنولوجى. والمتعة فى التجريب واكتشاف العلاقات الرياضية. واكتساب الميل وتنمية الاتجاه نحو الرياضيات والرغبة فى دراستها.

كما أكدت الرابطة القومية لمعلمى الرياضيات بأمريكا (NCTM) علي ضرورة تنمية تذوق الرياضيات لدى المتعلمين كهدف أساسى وليس بناء وتذكر المعرفة الرياضية وحقائقها المرتبطة بالمهارات الرياضية. (عبد الله صالح المقبل ،٢٠٠٣، web sit)

ولقد أشار Russell (2005,p121)، إلى أن تنمية تذوق المتعلمين لجمال الرياضيات قد يزيل الفجوة بين دارسي الرياضيات وعلمائها فيجعلهم يتمثلون دور العلماء فى الإحساس بمكانتها وقيمتها بين العلوم المختلفة وأهميتها فى الحياة، مما يساعد فى دفع المتعلمين إلى الاهتمام بالرياضيات والقناعة بدراستها.

ولقد أجريت العديد من الدراسات الأجنبية التى هدفت إلى تنمية تذوق جمال الرياضيات باستخدام مداخل جمالية متنوعة ومن بين هذه الدراسات: دراسة Paul Betts (2004)، ودراسة Greene (2005)، ودراسة John& Sons (2006)، وخرجت الدراسات ببعض النتائج ومنها أن تنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات ساعد فى إزالة قلق المتعلمين من تعلم الرياضيات. وشعورهم بالرضا عنها مع تحفيزهم على التقدم فى دراستها.

وأرجعت الدراسات ذلك إلى أن استخدام المداخل الجمالية فى تدريس الرياضيات ساعد فى محو الروتين والجمود المتمثل فى تقديم الرياضيات على أنها مجموعة من الأعداد والعلاقات الرياضية الجافة، التى ترهق المتعلم فى منطوقاتها وأساليب تدريسها وامتحاناتها.

مما سبق يتضح أن تنمية التذوق الجمالى للرياضيات من القضايا المهمة فى مجال تعليم الرياضيات والتى يجب أن يهتم بها المختصين بتدريس المادة من جانب. والقائمين على إعداد المعلمين بالمؤسسات التعليمية المختلفة وعلى رأسها كليات التربية من جانب آخر. تمهيداً لتنمية التذوق الجمالى لدى الطلاب والمتعلمين فى المراحل الدراسية الأدنى.

وعلى الرغم من تلك الأهمية؛ لم يعثر الباحث على دراسة عربية اهتمت بتشخيص تذوق جمال الرياضيات لدى الطلاب المعلمين سوى دراسة جمال حامد محمد (٢٠٠٧) التى هدفت لدراسة تذوق

الطلاب المعلمين لجماليات الرياضيات فى ضوء معايير الجمال الرياضى لدى أعضاء هيئة التدريس ومعلمى وموجهى الرياضيات. وتوصلت نتائج الدراسة إلى:

- تحديد لمعايير جماليات الرياضيات من وجهة نظر أعضاء هيئة التدريس ومعلمى وموجهى الرياضيات فى (النظام، والبساطة، والتركيب، والمنطقية، والتوازن).
- تفاوت فى معايير تذوق الطلاب المعلمين لجماليات المواقف الرياضية. فلم يحدث تطابق بينهم فى معايير تذوقهم للموقف الواحد.
- انخفاض مستويات الطلاب المعلمين فى استخدام معايير الجمال الرياضي.

كما أشارت الدراسة إلى أن برنامج إعداد معلمى الرياضيات قبل الخدمة لا يكتمل إلا بالعمل على تنمية تذوقهم لجمال الرياضيات. لما له من دور ايجابي فى تنمية التفكير والإبداع لديهم، وإقبالهم على الدراسة واستمتاعهم بها. مما ينعكس على تلاميذهم فى المستقبل.

(٤) التذوق الجمالى وهندسة الفركتال

يري محمد راتب الحلاق (٢٠٠٠، ص١٣٨) أن الطبيعة زاخرة بالجمال، والاستمتاع بالطبيعة وتذوق جمالها يتم بأسلوبين:

أ – الأسلوب المباشر:

ويتم ذلك من خلال عرض لوحات وصور وملصقات تبين مواطن الجمال من جبال وبحار وأنهار وشلالات ونباتات ومناقشة الطلاب فى تلك اللوحات مع الحرص علي تعريفهم بمواطن الجمال فيها.

ويمكن أن يتم ذلك فى مجال الرياضيات عن طريق استخدام المداخل الجمالية فى التدريس. وربط الأشياء فى الطبيعة بأصول رياضية. كما فى هندسة الفركتال وخاصة موضوع التشابه الذاتى الطبيعى والمضبوط. وبعض الفركتالات المختلفة كمجموعات **Julia** و **Mandelbrot**. مع الإشارة إلى مواطن الجمال المتضمنة بها.

ب – الأسلوب غير المباشر:

ويتم عن طريق احتكاك الأفراد المستمر بالبيئة التي تزخر بالقيم الفنية والجمالية المتنوعة.

ويمكن أن يتحقق ذلك فى مجال الرياضيات من خلال ممارسة الطلاب للأنشطة المختلفة المتوفرة فيها كإنشاء وتوليد الفركتالات بالطرق المختلفة ومقارنة هذه الأشكال بالبيئة. دون الإشارة إلى مواطن الجمال المتضمنة بها. مع طرح الأسئلة المختلفة حول أوجه الجمال المتضمنة. **وقد تم استخدم هذا الأسلوب فى الدراسة الحالية.**

وتتعدد القيم الجمالية المنتشرة فى البيئة المحيطة. فالكون بأسره ملئ بهذه القيم. ومنها الدقة، والتناسق، والترابط، والحركة الحية، والتنوع، والإيقاع، والتوافق والانسجام. (سعودى عبد الظاهر سيد، ١٩٩٩، ص ص١٧٢-١٧٤).

وفيما يلى توضيح لكل قيمة جمالية مع عرض بعض الآيات القرآنية التى أشارت اليها. ومحاولة الكشف عن مدى توفر تلك القيم الجمالية فى أشكال هندسة الفركتال.

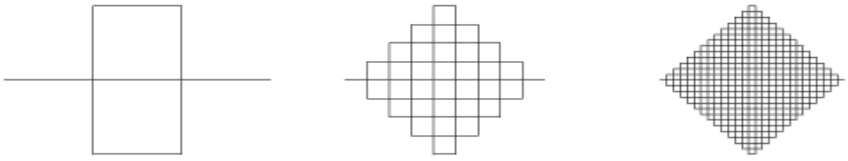
أ – الدقة:

– الدقة كقيمة جمالية فى البيئة المحيطة.

يشتمل الكون على بلايين من النجوم كلها متحركة، لا تتوقف عن الحركة لحظه واحدة منذ الأزل السحيق، الذى لا يدرك عقل البشرية مداه، هذا الكون لا يصطدم فيه نجم واحد بنجم آخر، ولا يحدث خطأ فى مدار واحد من مداراته التى تعد بالبلايين، وتلك دقه جميله معجزة لا يقدر عليها غير مبدع الكون، يقول الله تعالى: ﴿ وتَرَى الجِبَالَ تَحْسَبُهَا جَامِدَةً وهِيَ تَمُرُّ مَرَّ السَّحَابِ صُنْعَ اللَّهِ الَذِي أَتْقَنَ كُلَّ شَيْءٍ﴾ (سورة النمل آية ٨٨). إنها دقه جماليه بلا شك تجذب الحس وتهزه من الأعماق، فالدقة كقيمه جماليه تضفى على الشيء جماله المناسب.

– الدقة كقيمة جمالية فى أشكال الفركتال.

من خواص أشكال هندسة الفركتال أن أى فركتال لا يتقاطع مع نفسه على مراحل متعددة من التكرارات المتعاقبة حتى فى اللانهاية. ومثالاً لذلك فركتال "**Peano**" شكل (٣٤)، إن من الجمال فى هذا الفركتال أن أى قطعة مستقيمة فيه لا تتقاطع مع الأخرى على المدى الطويل للتكرارات المرحلية المتعاقبة.



شكل(٣٤)

الدقة كقيمة جمالية فى فركتال "**Peano**"

ب – التناسق:

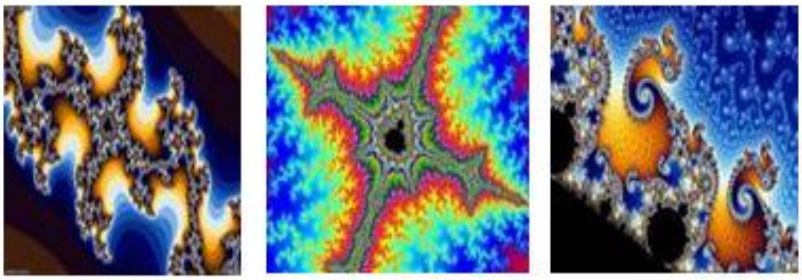
– التناسق كقيمة جمالية فى البيئة المحيطة.

تتضح قيمة التناسق في توزيع الألوان والظلال والأضواء والكائنات في رقعه بسيطة بصورة تلفت الحس، وتستريح لها العين، وتفرح لها النفس، وتهدأ لها الأعصاب، يقول الله تعالى: ﴿أَلَمْ تَرَ أَنَّ اللَّهَ أَنزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَأَخْرَجْنَا بِهِ ثَمَرَاتٍ مُّخْتَلِفاً أَلْوَانُهَا ومِنَ الجِبَالِ جُدَدٌ بِيضٌ وحُمْرٌ مُّخْتَلِفٌ أَلْوَانُهَا وغَرَابِيبُ سُودٌ* ومِنَ النَّاسِ والدَّوَابِّ والأَنْعَامِ مُخْتَلِفٌ أَلْوَانُهُ كَذَلِكَ﴾ (سورة: فاطر أية ٢٧).

إن قيمه التناسق التى تعرضها الآية توقظ حاسة الذوق الجمالى التى تنظر إلى الجمال نظرة تجريدية فتراه فى الصخرة، كما تراه فى الثمرة على الرغم من الاختلاف بين طبيعة الصخرة وطبيعة الثمرة.

– التناسق كقيمة جمالية فى أشكال الفركتال.

تبدو قيمة التناسق فى مجموعات "Julia". ومجموعة "Mandelbrot". شكل (٣٥). وتتضح فيهما أروع الأمثلة على عملية تناسق توزيع الألوان. لدرجة أن غير المتخصص فى الرياضيات يشعر وكأنها لوحات فنية أبدعها فنان. مع العلم بأنها ناتج بعض العمليات التكرارية المتعاقبة لدالة ما فى المستوى المركب.



شكل(٣٥)

التناسق كقيمة جمالية فى مجموعات "Julia و Mandelbrot"

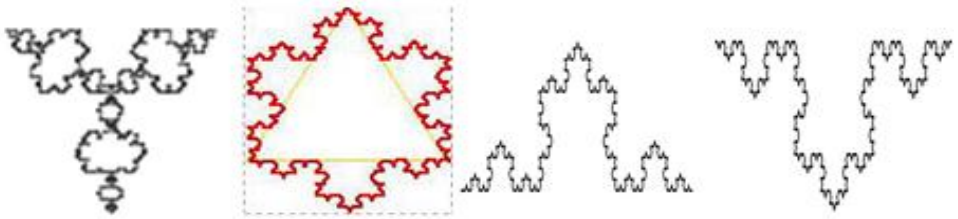
ج- الترابط:

- الترابط كقيمة جمالية فى البيئة المحيطة.

الذى يبدو فى اجتماع هذه الخلائق على أصل ومصدر واحد، واشتراكها فى نشاط واحد، يربط بينها جميعا يقول تعالى: (واللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَابَّةٍ مِّن مَّاءٍ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِي عَلَى بَطْنِهِ ومِنْهُم مَّن يَمْشِي عَلَى رِجْلَيْنِ ومِنْهُم مَّن يَمْشِي عَلَى أَرْبَعٍ يَخْلُقُ اللَّهُ مَا يَشَاءُ إِنَّ اللَّهَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ) (سورة: النور أية ٤٥) وهنا إشارة إلى أهميه توافر الترابط كقيمه جماليه فى الشيء ليصبح جميلاً.

- الترابط كقيمة جمالية فى أشكال الفركتال.

إن المتأمل لفركتالات " Koch" شكل (٣٦) الآتى، يجد أن هنالك سمة غريبة ويبدو جمال هذه السمة من غرابتها. فهى فركتالات غاية فى الجمال مختلفة تماماً فى الشكل النهائى مع أنها من أصل (مولد) واحد. وتسمى هذه الخاصية بالحساسية للشروط الابتدائية. فتغير طفيف فى الشروط الابتدائية أدى إلى إنتاج أشكال مختلفة تماماً فى النهاية.



شكل(٣٦)

الترابط كقيمة جمالية فى فركتالات"Koch"

د- الحركة الحية:

- **الحركة الحية كقيمة جمالية فى البيئة المحيطة.**

وهى تبدو فى كل شيء على سطح الأرض، حركه الأحياء من نبات وحيوان وطير وإنسان، وحركه النهر والبحر، وحركه الحياة والموت، وحركه الأضواء والظلال والنهار والليل. والقرآن يبرز هذه الحركة إبرازاً حتى يصل إلى دقه مبدعه فى التصوير، مثل قوله تعالى:(وِللَّهِ يَسْجُدُ مَن فِي السَّمَوَاتِ والأَرْضِ طَوْعاً وكَرْهاً وظِلالُهُم بِالْغُدُوِّ والآصَالِ) (سورة: الرعد أية ١٥)، فسجود الكون كله حركه حيه وقيمه جماليه تبدو فى ضم الظلال إلى الشخوص فى السجود مزدوج، وإذا الكون كله بما فيه من شخوص وظلال فى حركه حيه جميله.

- **الحركة الحية كقيمة جمالية فى أشكال الفركتال.**

الحركة الحية فى الفركتال تظهر فى الأعمال الفنية حيث تستخدم أشكال جميلة من الفركتال فى عمل خلفيات الأفلام المتحركة كحركة السحاب والغيوم أو الجبال أو الأنهار أو ..... الخ، فى فيلم كرتونى متحرك. ويمكن أن معايشتها أثناء توليد الفركتال خطوة بخطوة، باستخدام نظام الدوال المتكررة مرحلياً عبر شاشات الكمبيوتر. حيث تبدأ صورة الفركتال فى الظهور تدريجياً كلما زاد عدد التكرارات المرحلية وكأنها فى تتحرك. بدءً من بداية التوليد وحتى نهايته.

هـ- التنوع:

- **التنوع كقيمة جمالية فى البيئة المحيطة.**

يعتبر التنوع من أهم العوامل المؤثرة في شعور المتذوق باللذة. والتنوع ضد المماثلة التي تُشعر بالملل، فاختلاف ألوان الثمار والأزهار يدخل على النفس البهجة والسرور نتيجة تنوعها بشكل مميز، فتجعل الناظر إليها يشعر بأن هذا التنوع يخضع لقدرة إلهية معينة بعيدة عن العشوائية، يقول الله تعالى: (وهُوَ الَذِي أَنزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَأَخْرَجْنَا بِهِ نَبَاتَ كُلِّ شَيْءٍ فَأَخْرَجْنَا مِنْهُ خَضِراً نُّخْرِجُ مِنْهُ حَبّاً مُّتَرَاكِباً ومِنَ النَّخْلِ مِن طَلْعِهَا قِنْوَانٌ دَانِيَةٌ وجَنَّاتٍ مِّنْ أَعْنَابٍ والزَّيْتُونَ والرُّمَّانَ مُشْتَبِهاً وغَيْرَ مُتَشَابِهٍ انظُرُوا إِلَى ثَمَرِهِ إِذَا أَثْمَرَ ويَنْعِهِ إِنَّ فِي ذَلِكُمْ لآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يُؤْمِنُونَ) (سورة: الأنعام أية ٩٩)

- **التنوع كقيمة جمالية فى أشكال الفركتال.**

هندسة الفركتال غنية بأشكال فركتالية غاية فى الروعة والجمال، فلو أخذنا مثلاً جزء واحد منها وهو مجموعة "**Julia**"(لاحظ أن مجموعة **Julia** مجموعة جزئية من مجموعة **Mandelbrot**) لأمكننا الحصول على العديد والعديد من الفركتالات المتنوعة الغريبة الجميلة كلما تم تغيير قيمة الثابت المركب **C** كما هو موضح بشكل (٣١) بالصفحات السابقة.

و –الإيقاع:

- **الايقاع كقيمة جمالية فى البيئة المحيطة.**

كلمه إيقاع تعنى الترديد المتناغم لظاهرة ترديداً تلمح سماته من خلال تكراره المتناغم والإيقاع قيمه جماليه أوجدها الله سبحانه وتعالى فى المخلوقات الحية والجامدة وهو موجود بشكل عام فى حركه الحياة ويتضح ذلك من قوله عز وجل : (أَفَلا يَنظُرُونَ إِلَى الإِبِلِ كَيْفَ خُلِقَتْ* وإِلَى السَّمَاءِ كَيْفَ رُفِعَتْ* وإِلَى الجِبَالِ كَيْفَ نُصِبَتْ* وإِلَى الأَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْ* فَذَكِّرْ إِنَّمَا أَنتَ مُذَكِّرٌ) (سورة: الغاشية الآيات ١٧-٢١) فالآية بدأت بالدعوة إلى الرؤية وفيها يستخدم الإنسان خبرته البصرية ليدرك الإيقاعات من خلال الكون المحيط به. فالجبال سلاسل من الأقواس والمنحنيات ،و الإبل ظهورها علي هيئة أقواس، والرمال عبارة عن خطوط منحنية علي هيئة أقواس بفعل الرياح.

- **الايقاع كقيمة جمالية فى أشكال الفركتال.**

تظهرهذه القيمة الجمالية بوضوح فى الفركتالات. فعملية التكرار أو الترديد المتناغم هى أساس توليد أشكال الفركتال، فتوليد الفركتال إما أن يتم عن طريق التكرار المرحلى، أو عن طريق الدوال المتكررة مرحلياً. وأى من الطريقتين يعتمد بشكل أساسى على عمليات تكرارية متعاقبة من خلالها يبدأ شكل الفركتال فى الظهور. فكل أشكال هندسة الفركتال تتوفر بها هذه القيمة الجمالية.

ز -<u>التوافق والانسجام:</u>

- **التوافق والانسجام كقيمة جمالية فى البيئة المحيطة.**

يقصد به عملية إيجاد صلة أو علاقة تقارب أو تشابه أو تآلف فى الأشياء بعضها مع بعض ويمكن أن يتحقق التوافق أو الانسجام بين مجموعة من الألوان المختلفة ويسمى توافق لونى أو يتحقق بين مجموعة أشكال ويسمى توافق شكلى، أو يتحقق بين مجموعة من الأرقام المختلفة ويسمى توافق رقمى. والتوافق أو الانسجام قيمة جمالية عامة يمكن أن تكون بين أشياء كثيرة فى الحياة وهناك مثلاً مجموعة متوافقة من الناس من حيث السلوك أو من حيث الشكل وهناك مجموعة متوافقة من حيث الأصوات أو الأنغام الموسيقية وغير ذلك.

- **التوافق والانسجام كقيمة جمالية فى أشكال الفركتال.**

تتوفر فى أشكال فركتالات **Julia** و **Mandelbrot** قيمة التوافق اللونى، وكذلك التوافق الشكلى من حيث تقارب أشكالها من بعضها. فمجموعات **Julia** هى عبارة عن مجموعة **Mandelbrot** المتصلة ؟!. كما يبدو التوافق الشكلى بين فركتالى **Peano** و هيلبريت. ويبدو التوافق الرقمى ظاهراً بين فركتال سيربينكى وفركتال **Koch**، حيث يكون مقلوبات الأعداد المعبرة عن طول فركتال **Koch** فى أى مرحلة عبارة عن مساحة فركتال جوان **Sierpinski** فى نفس المرحلة.

تأسيساً على ما سبق يتبين ضرورة الاهتمام بتنمية الإحساس بالجمال وتذوقه من جانب. وتنمية التفكير الابتكارى من جانب آخر فى العلوم المختلفة بصفة عامة وفى الرياضيات بصفة خاصة؛ ذلك لأن رؤية معلم الرياضيات لجمالها يحدد إلى حد كبير موقفه من تدريسها. كما أن تفاعله معها يكون حقيقياً

عندما يمس الإحساس والوجدان ويشبع العقل وينمى القدرة على الابتكار. وينعكس ذلك بطبيعة الحال على المتعلمين أنفسهم.

وتنمية التذوق الجمالى للرياضيات أمراً ليس مستحيلاً. ويمكن تحقيقه بالكشف عن النواحى الجمالية التى تتضمنها المادة والتى تحررها من الجمود والتجريد لتنطلق بها إلى عالم جديد مليء بالفن والجمال.

وعلم الهندسة بصفة عامة وهندسة الفركتال بصفة خاصة يضم الكثير من المواقف التى قد تسهم فى تنمية تذوق الجمال فى الرياضيات. ليس هذا فحسب بل قد يساعد أيضاً فى إثراء وتنمية تفكير المتعلمين الإبتكارى.